УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Задачи
по линейной алгебре
Часть 2

Е. И. Анно, О. И. Демушкина,
И. А. Кострикин, Н. А. Курош,
А. А. Любкин, В. М. Ромашова

Экономический
факультет
МГУ
имени
М.В. Ломоносова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова
Экономический факультет

ЗАДАЧИ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Под общей редакцией Е. И. Анно

Москва
2021

УДК 512.64
ББК 22.143
З-15

Коллектив авторов:
Е. И. Анно, О. И. Демушкина, И. А. Кострикин, Н. А. Курош,
А. А. Любкин, В. М. Ромашова

З-15 **Задачи по линейной алгебре. Часть 2:** учебно-методическое пособие / под общей редакцией Е. И. Анно. — М.: Экономический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2021. — 162 с.

ISBN 978-5-906932-83-9

В пособии собраны задачи по линейной алгебре, используемые в процессе обучения на экономическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова.

Пособие предназначено для студентов технических и экономических вузов.

ISBN 978-5-906932-83-9

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ЗАДАЧИ
ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
ЧАСТЬ 2

XIII. МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

Определения и формулы

Матрицей перехода от базиса f к базису g (обозначение $T_{f\to g}$) называется квадратная матрица порядка n с элементами t_{jk}, в которой k-й столбец состоит из коэффициентов разложения базисного вектора g_k по базису f:

$$g_k = \sum_{j=1}^{n} t_{jk} f_j .$$

Матрица перехода всегда невырожденная.

Формула связи координат вектора в разных базисах: если X_f и X_g – два вектор-столбца координат вектора x в базисах f и g, то $X_f = T_{f\to g} \cdot X_g$.

Формула композиции для матриц перехода: для трех базисов e, f и g выполняется соотношение $T_{e\to f} T_{f\to g} = T_{e\to g}$.

В частности, $T_{g\to f} = (T_{f\to g})^{-1}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Даны два базиса $f = \{f_1(2;1), f_2(3;2)\}$ и $g = \{g_1(5;2), g_2(2;1)\}$. Найдите матрицы перехода $T_{f\to g}$ и $T_{g\to f}$.

Решение. По определению матриц перехода

$$T_{e\to f} = F = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to g} = G = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству транзитивности для матриц перехода $T_{e\to f} T_{f\to g} = T_{e\to g}$. Следовательно, матрица $T_{f\to g}$ является решением матричного уравнения $FX = G$. Так как матрица F невырожденная, решение можно найти, используя матричную формулу

$$T_{f\to g} = F^{-1}G = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $T_{e\to g}T_{g\to f} = T_{e\to f}$, откуда

$$T_{g\to f} = G^{-1}F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Можно также воспользоваться тождеством $T_{g\to f} = \left(T_{f\to g}\right)^{-1}$.

Пример 2. В пространстве R^3 своими координатами в стандартном базисе *e* заданы два других базиса

$$f = \{f_1(3;-1;-1), f_2(4;1;5),\ f_3(-1;2;5)\},$$
$$g = \{g_1(1;-1;2),\ g_2(1;1;-3),\ g_3(-1;0;1)\}.$$

Кроме того, задан вектор *x* с координатами $x_f = (1;1;-2)$ в базисе *f*. Найдите его координаты x_g в базисе *g*.

Решение. Согласно формуле связи координат вектора в двух разных базисах $X_g = T_{g\to f} \cdot X_f$. Для вычисления матрицы перехода $T_{g\to f}$ используем формулы Примера 1. Получим

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, T_{g\to f} = G^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 8 \\ -1 & 12 & 10 \\ -4 & 19 & 19 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X_g = T_{g\to f}X_f = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 8 \\ -1 & 12 & 10 \\ -4 & 19 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ -23 \end{pmatrix}.$

Пример 3. В пространстве R^3 со стандартным базисом *e* второй базис *f* задан матрицей перехода $T_{e\to f}$. Матричное уравнение $A_e \cdot X_e = B_e$ в базисе *e* задает линейное многообразие *H*. Задайте это многообразие матричным уравнением в базисе *f*, если

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X_e,\ B_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Согласно формуле связи координат вектора в двух разных базисах $X_e = T_{e\to f} \cdot X_f$. Подставим это выражение в матричное уравнение

$A_e \cdot X_e = B_e$. Получим $A_e \cdot T_{e\to f} \cdot X_f = B_e$. Следовательно, искомое уравнение $A_f \cdot X_f = B_f$, где

$$A_f = A_e \cdot T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 13 \\ 9 & 9 & 10 \\ 14 & 12 & 15 \end{pmatrix}, B_f = B_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Типовые задачи

1. В пространстве R^n со стандартным базисом e заданы еще два базиса f и g. Найдите матрицы перехода $T_{f\to g}$ и $T_{g\to f}$.

а) $f = \{f_1(-2;-1), f_2(3;2)\}$, $g = \{g_1(0;1), g_2(8;5)\}$.

б) $f = \{f_1(5;-3),\ f_2(3;-2)\}$, $g = \{g_1(4;3),\ g_2(1;-2)\}$.

в) $f = \{f_1(2;-1;1),\ f_2(-1;2;2),\ f_3(1;0;2)\}$,
$g = \{g_1(-3;5;3),\ g_2(2;0;2),\ g_3(4;-1;3)\}$.

г) $f = \{f_1(3;-1;5),\ f_2(1;3;2),\ f_3(1;2;2)\}$,
$g = \{g_1(3;-2;3),\ g_2(33;-1),\ g_3(4;1;1)\}$.

Дополнительно.

д) $f = \{f_1(7;4),\ f_2(5;3)\}$, $g = \{g_1(-2;3),\ g_2(2;-1)\}$.

е) $f = \{f_1(-1;3;2),\ f_2(-2;3;2), f_3(3;-2;-1)\}$,
$g = \{g_1(-1;5;-1),\ g_2(2;-2;-3),\ g_3(-1;2;1)\}$.

2. В пространстве R^n со стандартным базисом e заданы еще два базиса f и g, а также координаты x_f вектора x в базисе f (или x_g в базисе g). Найдите координаты x_g вектора x в базисе g (или координаты x_f в базисе f).

а) $f = \{f_1(-2;3),\ f_2(5;-8)\}$, $g = \{g_1(-4;1),\ g_2(-2;1)\}$, $x_f = (9;4)$.

б) $f = \{f_1(7;5),\ f_2(-3;-2)\}$, $g = \{g_1(2;1),\ g_2(-1;3)\}$, $x_g = (8;1)$.

в) $f = \{f_2(3;1;0),\ f_1(1;1;1),\ f_3(-3;2;4)\}$,
$g = \{g_1(1;2;3),\ g_2(3;1;3),\ g_3(1;1;2)\}$, $x_f\,(2;1;2)$.

г) $f = \{f_1(1;3;5), f_2(3;2;3), f_3(4;1;1)\}$,
$g = \{g_1(4;1;3), g_2(2;3;2), g_3(1;2;1)\}$, $x_g\,(2;-1;3)$.

Дополнительно.

д) $f = \{f_1(3;5), f_2(2;3)\}$, $g = \{g_1(2;1), g_2(5;3)\}$, $x_f = (1;-2)$.

е) $f = \{f_1(4;0;1), f_2(1;1;1), f_3(-3;4;2)\}$,
$g = \{g_1(3;2;1), g_2(3;1;3), g_3(2;1;1)\}$, $x_f\,(1;-5;1)$.

3. Векторы x и y имеют в базисе f координаты x_f и y_f, а в базисе g координаты x_g и y_g. Найдите матрицу перехода $T_{f\to g}$.

а) $x_f=(3;2)$, $x_g=(0;1)$, $y_f=(1;4)$, $y_g=(1;0)$.

б) $x_f=(5;2)$, $x_g=(2;1)$, $y_f=(1;1)$, $y_g=(3;2)$.

в) $x_f=(1;2)$, $x_g=(3;-6)$, $y_f=(2;-1)$, $y_g=(-2;4)$.

Дополнительно.

г) $x_f=(15;-10)$, $x_g=(3;-6)$, $y_f=(-6;4)$, $y_g=(-3;4)$.

д) $x_f=(1;2)$, $x_g=(1;-2)$, $y_f=(-2;-4)$, $y_g=(-2;4)$.

4. В пространстве R^3 в стандартном базисе e задано подпространство L. Задайте это подпространство с помощью СЛАУ в базисе f.

а) $L=L\{\,a_1(1;-1)\,\}$, $f=\{f_1(2;3), f_2(1;2)\}$.

б) $L=L\{\,a_1(1;-1;2), a_2(-2;1;3)\,\}$,
$f=\{f_1(3;-2;5), f_2(1;-1;-3), f_3(-2;2;3)\}$.

в) $L:\{6x_1+4x_2-7x_3=0$, $f=\{f_1(2;1;2), f_2(2;-1;1), f_3(-1;3;1)\}$.

г) $L:\{3x_1+3x_2+x_3=0$, $T_{f\to e}=\begin{pmatrix}1&3&2\\1&4&3\\2&-2&-3\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $L=L\{\,a_1(1;1;2), a_2(2;1;-3)\,\}$, $f=\{f_1(1;2;4), f_2(2;2;3), f_3(3;2;1)\}$.

е) $L=L\{\,a_1(2;5;-1)\,\}$, $T_{f\to e}=\begin{pmatrix}3&-1&3\\-5&2&-1\\-2&1&3\end{pmatrix}$.

5. В пространстве R^n со стандартным базисом e заданы еще два базиса f и g, а также линейное многообразие H, заданное СЛАУ или матричным уравнением в базисе f (или в базисе g). Задайте многообразие H с помощью СЛАУ или матричным уравнением в базисе g (соответственно в базисе f).

а) $f=\{f_1(7;3), f_2(2;1)\}$, $g=\{g_1(-3;-2), g_2(1;4)\}$,
$x_f=(x_1;x_2)$, $H=\{2x_1+x_2=7$.

б) $f=\{f(-3;5), f_2(-1;2)\}$, $g=\{g_1(7;-4), g_2(-2;1)\}$,
$x_g=(y_1;y_2)$, $H=\{3y_1-y_2=2$.

в) $f=\{f_1(1;-1;2), f_2(1;1;-3), f_3(-1;0;1)\}$,
$g=\{g_1(3;-1;-1), g_2(4;1;5), g_3(-1;2;5)\}$,

$$H:\left\{\begin{pmatrix}-3 & -1 & 3\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X_g=\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}\right..$$

г) $f=\{f_1(2;-1;1), f_2(-1;2;2), f_3(1;0;2)\}$,

$g=\{g_1(3;-5;-3), g_2(-2;0;-2), g_3(4;-1;3)\}$,

$$H:\left\{\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X_f=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right..$$

Дополнительно.

д) $f=\{f_1(2;3), f_2(5;8)\}$, $g=\{g_1(1;-2), g_2(2;-3)\}$,

$x_f=(x_1;x_2)$, $H=x_1+2x_2=3$.

е) $f=\{f_1(1;1;-2), f_2(2;3;-5), f_3(-1;-1;3)\}$,

$g=\{g_1(1;2;-2), g_2(8;13;-18), g_3(12;20;-27)\}$,

$$H:\left\{\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot X_f=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\right..$$

6. Найдите матрицу перехода $T_{g\to f}$ от базиса g к базису f в пространстве $V=R^n$, или $V=P_m[x]$ (многочлены степени не выше m), или $V=M[m,k]$ (матрицы порядка $m\times k$).

а) $V=P_4[x]$, $f=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$,

$g=\{x^2-x+1,\ 2x-1,\ 2x^2+x+1,\ -4x^3+5x^4,\ x^3-x^4\}$.

б) $V=R^5$, $g_1(1;-1;\ 0;-1;\ 0)$, $g_2(-2;\ 1;\ 0;\ 3;\ 0)$, $g_3(1;-2;\ 0;-1;\ 0)$,

$g_4(0;\ 0;-3;\ 0;\ 2)$, $g_5(0;\ 0;\ 2;\ 0;-1)$, $f=e$ – стандартный базис.

в) $V=M[2,2]$, $f=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$,

$g=\left\{\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&0\\1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

Дополнительно.

г) $V=P_4[x]$, $f=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$,

$g=\{2+5x^3,\ -x^4-x^2+3x,\ 3x^4+x^2-2x,\ 3+7x^3,$

$-4x^4-x^2+x\}$.

д) $V=P_4[x]$, $f=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$,

$g=\{2x^4+2x^2-3,\ 2x^4+x^2-3,\ -x^4-x^2+2,\ 3x+4x^3,\ 2+3x^3\}$.

7. В пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше двух заданы два базиса f и g. Пусть $(y_1; y_2; y_3)$ и $(z_1; z_2; z_3)$ – обозначения координат многочленов в этих двух базисах. Линейное многообразие H задано в базисе f с помощью СЛАУ с переменными $(y_1; y_2; y_3)$. Найдите матрицу перехода $T_{f\to g}$ и задайте многообразие H в базисе g с помощью СЛАУ с переменными $(z_1; z_2; z_3)$.

а) $f=\{2-x-x^2,\ 3+2x+x^2,\ 3+3x+2x^2\}$,

$g=\{1+x+2x^2,\ -2+3x+3x^2,\ 5-2x-3x^2\}$, $H:\begin{cases} y_1=1\\ y_3=2\end{cases}$.

б) $f=\{1-2x, 1-x, 1+x^2\}$, $g=\{1-x+x^2, 1-x^2, 1+x\}$,

$H:\begin{cases} y_1+y_2+2y_3=3\\ 2y_1-y_2+3y_3=1\end{cases}$.

в) $f=\{1+2x,\ 1+x^2,\ 1-x^2\}$, $g=\{1+x+x^2,\ 1+x^2,\ 1-x\}$,

$H:\begin{cases} 3y_1+y_2-y_3=10\\ -y_1+y_2+y_3=17\end{cases}$.

г) $f=\{1-x-x^2,\ 1-x,\ 1+x^2\}$, $g=\{1-x,\ 1-x^2,\ 1+x\}$,

$H:\begin{cases} y_1-3y_2+\ \ y_3=-7\\ 2y_1-\ \ y_2+4y_3=-3\end{cases}$.

Дополнительные задачи

8. В пространстве R^3 найдите матрицу перехода от базиса $f=\{e_3, e_1, e_2\}$ к базису $g=\{-e_2, e_3, -e_1\}$.

9. Укажите матрицу перехода к какому-нибудь ортогональному базису, два первых вектора которого лежат в плоскости $\pi:\{x+y+z=0$.

10. В пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше двух задан базис f. Для другого базиса g известна матрица перехода $T_{g\to f}$. Найдите координаты многочлена $p(x)$ в базисе g, если

$$f=\{x^2-x+2,\ 2x^2+3x+3,\ (x+1)^2\},\ T_{g\to f}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$p(x)=x^2-2x+2$.

11. Вектор x задан в базисах $f=\{f_1, f_2\}$ и $g=\{g_1, g_2\}$ координатами $x_f=(3;-1)$ и $x_g=(1;2)$. Укажите полную систему уравнений, задающих все возможные матрицы перехода от базиса f к базису g.

12. Векторы x и y заданы в базисах $f=\{f_1, f_2, f_3\}$ и $g=\{g_1, g_2, g_3\}$ координатами $x_f=(2;2;1)$, $y_f=(-1;1;1)$, $x_g=(3;2;1)$, $y_g=(-2;2;-1)$. Ука-

жите уравнения, задающие все возможные матрицы перехода от базиса f к базису g. Образует ли данное множество матриц перехода линейное многообразие в пространстве всех матриц размера 3×3?

Ответы на типовые задачи

1. а) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&2\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-2&3\end{pmatrix}$.

   б) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}17&-4\\-27&7\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\frac{1}{11}\cdot\begin{pmatrix}7&4\\27&17\end{pmatrix}$.

   в) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&1\\-2&-1&-1\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&-5&-8\\1&3&5\end{pmatrix}$.

   г) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}3&7&7\\13&46&42\\-19&-64&-59\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\begin{pmatrix}26&35&28\\31&44&35\\-42&-59&-47\end{pmatrix}$.

   д) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}-21&11\\29&-15\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}15&11\\29&21\end{pmatrix}$.

   е) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}24&9&2\\-31&-13&-2\\-13&-5&-1\end{pmatrix}$, $T_{g\to f}=\begin{pmatrix}-3&1&-8\\5&-2&14\\14&-3&33\end{pmatrix}$.

2. а) $x_g=(4;-9)$. б) $x_f=(3;2)$. в) $x_g(4;-1;0)$.
   г) $x_f(1;0;2)$. д) $x_g=(2;-1)$. е) $x_g(3;1;-8)$.

3. а) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$. б) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}9&-13\\3&-4\end{pmatrix}$.
   в) Не существует. г) Не существует.
   д) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix}1+2y&y\\2+2t&t\end{pmatrix}$, где $t\neq 2y$.

4. а) $L:\{5y_1+3y_2=0$. б) $L:\{6y_1-5y_2+7y_3=0$.
   в) $L:\{2y_1+y_2-y_3=0$. г) $L:\{-y_1+2y_2+y_3=0$.
   д) $L:\{-5y_1-y_2+2y_3=0$. е) $L:\begin{cases}8y_1+6y_2-5y_3=0\\2y_1+2y_2-y_3=0\end{cases}$.

5. а) $x_g=(y_1,y_2)$, $H=\{-3y_1+11y_2=7$.
   б) $x_f=(x_1,x_2)$, $H=\{2x_1+x_2=2$.

в) $H:\left\{\begin{pmatrix} -6 & 7 & -1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}\cdot x_f = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}\right.$.

г) $H:\left\{\begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 9 & 7 & -9 \end{pmatrix}\cdot X_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$.

д) $H = \{4y_1 + 7y_2 = 3$.

е) $H:\left\{\begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 1 & 8 & 12 \end{pmatrix}\cdot X_g = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right.$.

6. а) $T_{g\to f} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

б) $T_{g\to f} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $T_{g\to f} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

г) $T_{g\to f} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -11 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

д) $T_{g\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

7. а) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $H:\begin{cases} 2z_1-z_2+z_3=1 \\ 5z_1+2z_2-3z_3=2 \end{cases}$.

б) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H:\begin{cases} 2z_1 + z_3=3 \\ 6z_1-11z_2-7z_3=1 \end{cases}$.

в) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H:\begin{cases} z_1-z_2-3z_3=10 \\ 3z_1+5z_2+5z_3=17 \end{cases}$.

г) $T_{f\to g}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $H:\begin{cases} -3z_1+9z_2+13z_3=-7 \\ -z_1+10z_2+15z_3=-3 \end{cases}$.

Ответы на дополнительные задачи

8. $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Например, $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $p_g=(5/2;\ -2;\ 5/2)$.

11. Указание. Матрица $T_{f\to g}=A$ удовлетворяет условиям $X_f^T=A\cdot X_g^T$ и $\det(A)\neq 0$.

XIV. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Определения и формулы

Билинейной формой в линейном пространстве V называется числовая функция $B(x, y)$ от двух векторных аргументов x и y, линейная по каждому аргументу при фиксированном значении другого аргумента.

Матрицей билинейной формы в базисе $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ называется квадратная матрица $B = b_{jk}$ порядка n, элементы которой задаются формулой $b_{jk} = B(f_j, f_k)$.

Если матрица в базисе f известна, значение билинейной формы вычисляется по формуле

$$B(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_j y_k .$$

Если координаты векторов x и y изображать вектор-столбцами X и Y, то формулу можно записать в матричном виде $B(x, y) = X^T \cdot B \cdot Y$.

Билинейная форма, для которой $B(x, y) = B(y, x)$, называется симметричной.

Квадратичной формой, полученной из билинейной формы $B(x, y)$, называется числовая функция одного векторного аргумента x, определенная формулой

$$Q(x) = B(x, x).$$

Если матрица билинейной формы в базисе f известна, значение квадратичной формы задается формулой

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_j x_k, \text{ или } Q(x) = X^T \cdot B \cdot X$$

в матричном представлении.

Для каждой квадратичной формы $Q(x)$ существует единственная симметричная билинейная форма $B(x, y)$, для которой $Q(x) = B(x, x)$. Эта билинейная форма называется полярной для данной квадратичной формы. Матрицей квадратичной формы называется матрица соответствующей полярной формы. Эта матрица по определению симметрична.

Матрицы B_f и B_g одной и той же билинейной формы в разных базисах f и g связаны соотношением $B_g = (T_{f \to g})^T \cdot B_f \cdot T_{f \to g}$, где $T_{f \to g}$ – матрица перехода от базиса f к базису g. Та же формула связывает матрицы квадратичной формы в разных базисах.

В частности, если билинейная форма задана матрицей B_f в базисе f, а матрица A представлена в виде произведения $A = C^T \cdot B_f \cdot C$, где матрица C – невырожденная, то в базисе g с матрицей перехода $T_{f \to g} = C$ матрица данной билинейной формы $B_g = A$.

Ранг матрицы билинейной формы во всех базисах один и тот же.

Билинейная форма называется вырожденной, если ее матрица в любом базисе вырожденная.

Симметричная билинейная форма и соответствующая квадратичная форма называются приведенными к каноническому виду в некотором базисе, если их матрица в этом базисе диагональная. Соответствующий базис называется каноническим для данной формы. Если дополнительно все элементы на главной диагонали матрицы равны +1, –1 или 0, то форма называется приведенной к нормальному виду.

Для любой симметричной билинейной формы в конечномерном линейном пространстве существует базис, в котором форма приводится к каноническому виду. Канонический базис всегда можно выбрать так, чтобы форма в нем была приведена к нормальному виду.

Обозначим символами P_f^+, P_f^-, P_f^0 количество положительных чисел, отрицательных чисел и нулей на диагонали матрицы билинейной формы, приведенной к каноническому виду в каноническом базисе f. Закон инерции для симметричных билинейных форм гласит, что во всех канонических базисах эти числа одинаковые. Тройка величин $\{P^+, P^-, P^0\}$, в которых обозначение базиса опущено, будем называть сигнатурой билинейной формы. Числа P^+ и P^- называются положительным и отрицательным индексами инерции билинейной формы.

Симметричная билинейная форма $B(x, y)$ называется положительно определенной на подпространстве $L \subseteq V$, если для любого ненулевого вектора $x \in L$ значение соответствующей квадратичной формы $Q(x) = B(x, x) > 0$. Если форма положительно определена на всем пространстве V, то она называется просто положительно определенной.

Аналогично определяются понятия отрицательной определенности, неотрицательной определенности и неположительной определенности. Если для некоторых x и y выполнено $Q(x) = B(x, x) > 0$, $Q(y) = B(y, y) < 0$, то форма называется знакопеременной.

Все вышеуказанные характеристики используются также для квадратичных форм.

Критерий Сильвестра позволяет проверить знакоопределенность билинейной или квадратичной формы без приведения к каноническому виду. Пусть B – матрица симметричной билинейной формы $B(x, y)$ в некотором базисе f. Обозначим через Δ_k главный минор матрицы, образованный первыми k строками и k столбцами. Тогда билинейная форма положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta_k > 0$ для всех k. Билинейная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки миноров Δ_k при возрастании k чередуются, начиная со знака минус при $k = 1$. Если все $\Delta_k \neq 0$, и не выполнено ни первое условие, ни второе, то форма является знакопеременной.

Примеры решения задач

Пример 1. Дана квадратичная форма $Q(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 12x_1x_2$.

а) Приведите ее к каноническому виду методом последовательного выделения полных квадратов.

б) От канонического вида перейдите к нормальному виду.

в) Для нормального вида выразите старые координаты через новые.

Решение. а) Подберем коэффициент d и замену $y_1 = ax_1 + bx_2$ таким образом, чтобы было $2d \cdot ab = -12$ и при этом либо $da^2 = 3$, либо $db^2 = 5$. Выбор неоднозначен, но удобно взять $d = 3$, $a = 1$, $b = -2$. При таком выборе получим

$$Q(x) = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 12x_1x_2 = 3(x_1 - 2x_2)^2 - 7x_2^2.$$

Положим $y_1 = x_1 - 2x_2$, $y_2 = x_2$. Тогда $Q(y) = 3y_1^2 - 7y_2^2$.

б) Если теперь положить $z_1 = \sqrt{3} \cdot y_1$, $z_2 = \sqrt{7} \cdot y_2$, то $B(z) = z_1^2 - z_2^2$.

в) Из условий $\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$, получим $\begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$.

В свою очередь $\begin{cases} y_1 = \dfrac{z_1}{\sqrt{3}} \\ y_2 = \dfrac{z_2}{\sqrt{7}} \end{cases}$. Окончательно $\begin{cases} x_1 = \dfrac{z_1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z_2}{\sqrt{7}} \\ x_2 = \dfrac{z_2}{\sqrt{7}} \end{cases}$.

Пример 2. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = 8x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа. Укажите сигнатуру квадратичной формы.

Решение. Для записи преобразований Лагранжа используем схему Лагранжа. Сначала выписывается матрица квадратичной формы. К этой матрице применяются несколько итераций. При каждой итерации на главной диагонали выбирается ненулевой ведущий элемент (если есть возможность – единица, иначе общий делитель выносится за скобку). Ведущий элемент обведен рамкой. Затем, используя преобразования Гаусса (к каждой строке прибавляется выбранная строка, умноженная на подходящий коэффициент), обнуляются элементы выбранного столбца.

Для нашей задачи

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 12 \\ -4 & \boxed{1} & 2 \\ 12 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 20 \\ -4 & 1 & 2 \\ 20 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 20 \\ -4 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} -208 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} -208 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя в схеме матрица означает, что новые переменные выражаются через старые переменные по формулам

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_3 = 10x_1 + x_3 \end{cases},$$

а квадратичная форма в новых переменных принимает вид

$$Q(y) = -208y_1^2 + y_2^2 + 2y_3^2.$$

Сигнатура квадратичной формы $\{P^+ = 2, P^- = 1, P^0 = 0\}$.

Пример 3. Приведите квадратичную форму

$$Q(x) = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. На главной диагонали матрицы квадратичной формы все коэффициенты нулевые. Поэтому сначала сделаем вспомогательное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}, \text{ тогда } \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -x_1 + x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}.$$

В новых координатах квадратичная форма принимает вид

$$Q(y) = 4y_1(y_1 + y_2) + 4y_1y_3 - 4(y_1 + y_2)y_3 = 4y_1^2 + 4y_1y_2 - 4y_2y_3.$$

Теперь воспользуемся схемой Лагранжа

$$\begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 \\ \square \\ \square \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ \square \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\;5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма в переменных $\{z_1, z_2, z_3\}$ принимает вид

$$Q(z) = 4z_1^2 - z_2^2 + 4z_3^2.$$

Выразим переменные $\{z_1, z_2, z_3\}$ через $\{y_1, y_2, y_3\}$ и переменные $\{y_1, y_2, y_3\}$ через $\{z_1, z_2, z_3\}$:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 0{,}5y_2 \\ z_2 = y_2 + \ \ 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = z_1 - 0{,}5z_2 + z_3 \\ y_2 = z_2 - 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}.$$

Теперь выразим переменные $\{z_1, z_2, z_3\}$ через $\{x_1, x_2, x_3\}$ и переменные $\{x_1, x_2, x_3\}$ через $\{z_1, z_2, z_3\}$:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + 0{,}5y_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ z_3 = y_3 = x_3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = y_1 = 1{,}5z_1 - 0{,}5z_2 + z_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 = 0{,}5z_1 + 0{,}5z_2 - z_3 \\ x_3 = y_3 = z_3 \end{cases}.$$

В результате мы получили матрицу перехода, канонический базис и сигнатуру квадратичной формы:

$$T_{e\to f} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ f = \left\{ f_1\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), f_2\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), f_3(1; -1; 1) \right\},$$

$$\{P^+ = 2, P^- = 1, P^0 = 0\}.$$

Пример 4. В пространстве R^5 задана квадратичная форма

$$Q(x) = 5x_1^2 + 20x_4^2 + x_5^2 - 20x_1x_4 + 4x_1x_5 + x_2x_3 - 8x_4x_5.$$

а) Приведите ее к каноническому виду и выпишите его.

б) Запишите с помощью СЛАУ в базисе *e* подпространство L_f^+ максимальной размерности, на котором квадратичная форма положительно определена.

в) Запишите с помощью СЛАУ подпространство L_f^{+0} максимальной размерности, на котором квадратичная форма неотрицательно определена.

г) Запишите с помощью СЛАУ подпространство L_f^{00} максимальной размерности, на котором квадратичная форма тождественно равна нулю.

Решение. а) Все вычисления будут значительно проще, если заметить, что $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x)$, где составляющие квадратичные формы

$$Q_1(x) = 5x_1^2 + 20x_4^2 + x_5^2 - 20x_1x_4 + 4x_1x_5 - 8x_4x_5,\ Q_2(x) = x_2x_3$$

содержат разные переменные. Форма $Q_1(x)$ зависит от трех переменных. Она приводится к каноническому виду так же, как в Примере 2:

$$\begin{pmatrix} 5 & -10 & 2 \\ -10 & 20 & -4 \\ 2 & -4 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q_1(y) = y_1^2 + y_5^2, \text{ где } \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \\ y_5 = 2x_1 - 4x_4 + x_5 \end{cases}.$$

Вторую форму привести к нормальному виду несложно:

$$Q_2(x) = x_2x_3 = Q_2(y) = y_2^2 - y_3^2, \text{ где } \begin{cases} x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}.$$

В итоге

$$Q_1(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_5^2.$$

б) Согласно теории, $L_f^+ = L\{f_1, f_2, f_5\}$. Тогда СЛАУ для L_f^+ имеет вид

$$L_f^+ : \begin{cases} y_4 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}, \text{ или } L_f^+ : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

в) $L_f^{+0} = L\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, откуда

$$L_f^{+0} : \{y_3 = 0, \text{ или } L_f^{+0} : \{x_2 - x_3 = 0.$$

г) Один из возможных вариантов $L_f^{00} = L\{f_4, f_1 + f_3\}$. В этом случае СЛАУ для L_f^{00}

$$L_f^{00} = \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_5 = 0 \\ y_1 = y_3 \end{cases}, \text{ или } L_f^{00} = \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_4 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Пример 5. Можно ли привести симметричную квадратичную форму $Q_1(x)$, заданную в базисе e, к виду $Q_2(z)$? Если да, то укажите матрицу перехода к базису f, в котором она имеет этот вид.

$$Q_1(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2,\ Q_2(z) = 5z_1^2 + 4z_2^2 - 20z_1z_2.$$

Решение. Пусть ответ на вопрос положительный, то есть существует квадратичная форма, которая в базисах e и g задается выражениями $Q_1(x)$ и $Q_2(z)$. Тогда

$$B_e = B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},\ B_g = B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Надо определить, существует ли матрица $C = T_{e\to g}$ такая, что $B_g = C^T \cdot B_e \cdot C$. Для этого приведем обе формы к нормальному виду:

$$Q_1(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2 = 4(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 = y_1^2 - y_2^2,$$

$$Q_2(z) = 5z_1^2 + 4z_2^2 - 20z_1z_2 = 5(z_1 - 2z_2)^2 - 16z_2^2 = y_1^2 - y_2^2,$$

Имеем:

$$(1)\ \begin{cases} y_1 = 2(x_1 + x_2) \\ y_2 = x_1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 = y_2 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - y_2 \end{cases};$$

$$(2)\ \begin{cases} y_1 = \sqrt{5}\cdot(z_1 - 2z_2) \\ y_2 = 4z_2 \end{cases}.$$

В итоге получим, что нужное равенство $Q_1(x) = Q_2(z)$ будет выполнено при условии

$$\begin{cases} x_1 = y_2 = 4z_2 \\ x_2 = \dfrac{y_1}{2} - y_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot(z_1 - 2z_2) - 4z_2 = \dfrac{\sqrt{5}\cdot z_1}{2} - (4+\sqrt{5})z_2, \end{cases}$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \sqrt{5}/2 & -4-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Пример 6. В пространстве R^5 задана квадратичная форма $Q(x,p)$, зависящая от параметра p. При каких значениях параметра p максимальная размерность m подпространства L^{00}, на котором $Q(x) = 0$, максимальна?

$$Q(x) = (4-p)x_1^2 + (p+1)x_2^2 - (p+3)x_3^2 + 3x_5^2.$$

Решение. Известно, что

$$m = \dim\left(L^{00}\right) = P^0 + min\left\{P^+, P^-\right\}.$$

Выделим на прямой промежутки

$$(-\infty,-3),\ (-3,-1),\ (-1,4),\ (4,+\infty),$$

в которых выражения $(p-4)$, $(p+1)$, $(-p-3)$ сохраняют знак. Сигнатуры $\{P^+,P^-,P^0\}$ в этих промежутках равны соответственно

$$\{3,1,1\},\ \{2,2,1\},\ \{3,1,1\},\ \{2,2,1\}.$$

Следовательно:

при $p\in(-\infty,-3)\cup(-1,4)$ будет $m=2$;

при $p\in(-3,-1)\cup(4,+\infty)$ будет $m=3$.

Во всех точках $p=-3,-1,4$ сигнатуры равны $\{2,1,2\}$, и для них также $m=3$. Итак,

$$p\in[-3,-1]\cup[4,+\infty).$$

Пример 7. Является ли отрицательно определенной квадратичной формой ограничение квадратичной формы

$$Q(x)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

на подпространство L, заданное СЛАУ

$$L:\{x_1+2x_2+x_3=0.$$

Решение. Сделаем замену

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2+x_3 \\ y_2=x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}.$$

Тогда в новых переменных

$$Q(y)=(y_1-2y_2-y_3)^2+3y_2^2-y_3^2+4(y_1-2y_2-y_3)y_2+$$
$$+2(y_1-2y_2-y_3)y_3+6y_2y_3=y_1^2-y_2^2-2y_3^2+2y_2y_3.$$

Подпространство L в новых переменных задается уравнением $L:\{y_1=0$. Значит, в новых переменных ограничение квадратичной формы $Q(x)$ на подпространство L имеет вид

$$Q'(y)=-y_2^2-2y_3^2+2y_2y_3=-(y_2+y_3)^2-y_3^2.$$

Эта форма отрицательно определена.

Типовые задачи

1. Базис $g=\{g_1,g_2\}$ выражается через базис $f=\{f_1,f_2\}$. Билинейная форма $B(x,y)$ в R^2 в базисе g имеет матрицу B_g. Найти ее матрицу B_f в базисе f.

а) $g_1=f_1+2f_2,\ g_2=f_2-2f_1,\ B_g=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}.$

б) $g_1=3f_1+2f_2,\ g_2=4f_1+3f_2,\ B_g=\begin{pmatrix}3&5\\2&4\end{pmatrix}.$

в) $g_1=f_1+3f_2,\ g_2=f_2-3f_1,\ B_g=\begin{pmatrix}10&3\\3&2\end{pmatrix}.$

г) $g_1=3f_1+2f_2,\ g_2=4f_1+3f_2,\ B_g=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}.$

2. Квадратичная форма $Q(x)$ в R^2 или R^3 задана в стандартном базисе e. Выделив полный квадрат, приведите ее к каноническому виду и выпишите его. Выразите старые переменные через новые.

а) $Q(x)=x_1^2-2x_2^2-4x_1x_2.$

б) $Q(x)=3x_1^2-2x_2^2-8x_1x_2.$

в) $Q(x)=-12x_1x_2.$

г) $Q(x)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3.$

д) $Q(x)=8x_1x_2-4x_2x_3.$

Дополнительно.

е) $Q(x)=4x_1^2+9x_2^2+12x_1x_2.$

ж) $Q(x)=-7x_1^2+3x_2^2-9x_1x_2.$

з) $Q(x)=-2x_1^2-x_2^2-6x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-4x_2x_3.$

и) $Q(x)=2x_1^2+3x_2^2+x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3.$

3. Квадратичная форма $Q(x)$ в R^n задана в стандартном базисе e. Используя схему Лагранжа, приведите ее к каноническому виду и выпишете этот вид в каноническом базисе f. Укажите базис f и матрицу перехода $T_{e\to f}$. Выразите новые переменные через старые и старые переменные через новые.

а) $Q(x)=-x_1^2+7x_2^2+x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$

б) $Q(x)=9x_1^2+x_2^2+4x_3^2+6x_1x_2-12x_1x_3-4x_2x_3.$

в) $Q(x)=-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3.$

г) $Q(x)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+x_4^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3-2x_2x_4-8x_3x_4.$

д) $Q(x)=x_1^2+3x_2^2-4x_3^2+5x_4^2+x_5^2+4x_1x_4-2x_2x_3+4x_2x_5-2x_3x_5.$

Дополнительно.

е) $Q(x)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3.$

ж) $Q(x)=-8x_1^2-x_2^2-6x_3^2+8x_1x_2-24x_1x_3-4x_2x_3.$

з) $Q(x)=-5x_1^2-17x_2^2+14x_3^2+20x_1x_2+10x_1x_3-8x_2x_3.$

и) $Q(x)=5x_1^2+3x_2^2+25x_3^2+6x_1x_2+4x_1x_3+12x_2x_3.$

к) $Q(x)=5x_1^2+6x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3.$

4. Квадратичная форма $Q(x)$ в R^3 задана в базисе e. Используя схему Лагранжа, приведите ее к нормальному виду и выпишите его. Укажите матрицу перехода $T_{e\to f}$ от базиса e к каноническому базису f. Укажите сигнатуру квадратичной формы.

а) $Q(x)=-2x_1^2-x_2^2-6x_3^2+4x_1x_2-12x_1x_3-4x_2x_3.$

б) $Q(x)=-2x_1^2-x_2^2-6x_3^2-4x_1x_2+6x_1x_3+4x_2x_3.$

в) $Q(x)=x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3.$

г) $Q(x)=4x_1x_2+6x_1x_3-2x_2x_3.$

Дополнительно.

д) $Q(x)=2x_1^2+10x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-4x_1x_3+6x_2x_3.$

е) $Q(x)=-5x_1^2-17x_2^2+14x_3^2+20x_1x_2+10x_1x_3-8x_2x_3.$

5. Квадратичная форма $Q(x)$ в R^5 задана в стандартном базисе e. Приведите форму к каноническому виду и выпишите его. Опишите заданные в условии подпространства L_f^+, L_f^{+0}, L_f^-, L_f^{-0}, L_f^{00} максимальной размерности, на которых квадратичная форма соответственно положительно определена, неотрицательно определена, отрицательно определена, неположительно определена или тождественно равна нулю. Ответы задайте линейной оболочкой в каноническом базисе f, однородной СЛАУ в базисе f и однородной СЛАУ в базисе e.

а) $Q(x)=8x_1^2+x_3^2+8x_5^2-6x_1x_3+16x_1x_5-x_2x_4-6x_3x_5$, найти L_f^+ и L_f^{00}.

б) $Q(x)=4x_2^2-x_3^2+x_4^2-x_5^2+2x_1x_2-2x_1x_3-2x_1x_4-6x_1x_5-2x_2x_3-$
$-4x_2x_4-10x_2x_5-4x_3x_5+2x_4x_5$, найти L_f^{+0} и L_f^{00}.

Дополнительно.

в) $Q(x)=4x_1^2-3x_3^2-12x_5^2-8x_1x_3+16x_1x_5-x_2x_4+12x_3x_5$,
найти L_f^{+0} и L_f^{00}.

г) $Q(x) = -x_1^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_5 - 18x_3x_4$, найти L_f^+ и L_f^{00}.

д) $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_4^2 + 6x_5^2 - 2x_1x_3 + 4x_1x_5 + 4x_2x_4 - 8x_3x_5$, найти L_f^{-0} и L_f^{00}.

е) $Q(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 + 11x_4^2 - 4x_5^2 + 12x_1x_4 + 6x_2x_3 - 4x_2x_5 - 20x_3x_5$, найти L_f^+ и L_f^{00}.

ж) $Q(x) = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_4^2 + x_5^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_4 + 4x_2x_5 + 4x_4x_5$, найти L_f^- и L_f^{00}.

6. Какой билинейной форме соответствуют данные матрицы (положительно определенной, неотрицательной, знакопеременной и т.д.)?

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$. д) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. е) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

ж) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. з) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Найдите все значения параметра p, при которых квадратичная форма $Q(x)$ в R^3 положительно определена.

а) $Q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + (p+3)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2(p+2)x_2x_3$.

б) $Q(x) = (p+7)x_1^2 + 3x_2^2 - (p+2)x_3^2 + (2p+12)x_1x_2 +$
$+ 2x_1x_3 - (2p+6)x_2x_3$.

в) $Q(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + (4p+26)x_1x_2 - (4p+22)x_1x_3 - 6x_2x_3$.

г) $Q(x) = x_1^2 + 8px_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2px_2x_3$.

8. В пространстве R^3 задана матрица квадратичной формы $Q(x)$, зависящей от параметра p. При каких значениях параметра p максимальная размерность подпространства L^{00}, на котором $Q(x) = 0$, максимальна? При одном из возможных p укажите СЛАУ в координатах (x_1, x_2, x_3) для этого L^{00}.

а) $\begin{pmatrix} 6p+14 & 3p+5 & -2p-4 \\ 3p+5 & 2p+3 & -p-2 \\ -2p-4 & -p-2 & p+2 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 6p-25 & p-7 & 10-2p \\ p-7 & 2p-8 & 5-p \\ 10-2p & 5-p & p-5 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 6p-16 & -p-1 & 5-5p \\ -p-1 & p+1 & 3p+3 \\ 5-5p & 3p+3 & 10p+5 \end{pmatrix}$. г) $\begin{pmatrix} 11p+21 & 1-p & -5p-4 \\ 1-p & p-1 & 2p-2 \\ -5p-4 & 2p-2 & 5p-2 \end{pmatrix}$.

9. Квадратичная форма $Q(x)$ в R^n, зависящая от параметра a, задана в базисе e. При всех a укажите размерности подпространств L_f^+, L_f^{+0}, L_f^{00} (подпространств максимальной размерности, на которых квадратичная форма положительно определена, неотрицательно определена и тождественно равна нулю). Укажите такое значение параметра a, при котором одновременно достигаются максимальные размерности подпространств L_f^{+0} и L_f^{00}.

а) $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + 2a\,x_1x_2 + 2x_1x_3 + (2a+2)x_2x_3 + 2x_2x_4$ в R^4.

б) $Q(x) = x_1^2 + 16x_2^2 + 2x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 + (2a-2)x_1x_2 + 2x_1x_3 + {}$ $+ (2a-2)x_2x_3 - 2x_3x_5$ в R^5.

10. Является ли ограничение квадратичной формы $Q(x)$ в R^3 на подпространство L отрицательно определенной формой?

а) $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, $L: \{x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

б) $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, $L: \{2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

в) $Q(x) = -3x_1^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$, $L: \{2x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

г) $Q(x) = -18x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 14x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_2x_3$, $L: \{x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

д) $Q(x) = -x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 18x_2x_3$, $L: \{x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

е) $Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 20x_2x_3$, $L: \{x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

ж) $Q(x) = 8x_2^2 + x_4^2 + 4x_5^2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_4 - 8x_4x_5$, $L: \{3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$.

11. При каком значении параметра p квадратичная форма $Q(x)$ в R^3 неотрицательна на линейном подпространстве L?

а) $Q(x) = x_1^2 + px_2^2 + (p+3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, $L: \{x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

б) $Q(x) = -x_1^2 + (3-p)x_2^2 - px_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2(p-3)x_2x_3$, $L: \{x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

в) $Q(x) = (3p+1)x_1^2 + (p+8)x_2^2 + x_3^2 - 4(p+2)x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$, $L: \{2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

12. Можно ли привести симметричную билинейную форму $B_1(x,y)$ в R^3, заданную в стандартном базисе e, к виду $B_2(u,v) = -u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$? Если можно, то укажите матрицу перехода $T_{e\to f}$ к базису f, в котором она имеет этот вид.

а) $B_1(x,y) = 6x_1y_1 + x_3y_3 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

б) $B_1(x,y) = -x_1y_1 - 5x_2y_2 - 4x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1$.

Дополнительно.

в) $B_1(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 - 4x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$.

г) $B_1(x,y) = -2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

д) $B_1(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$.

13. Можно ли привести квадратичную форму $Q_1(x)$, заданную в стандартном базисе e, к виду $Q_2(y)$? Если можно, то укажите матрицу перехода $T_{e\to f}$ к базису f, в котором она имеет этот вид.

а) $Q_1(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_1x_2$, $Q_2(y) = 5y_1^2 + 4y_2^2 - 20y_1y_2$.

б) $Q_1(x) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1x_2$, $Q_2(y) = -2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_1y_2$.

в) $Q_1(x) = x_1^2 + 13x_2^2 + 4x_1x_2$, $Q_2(y) = 10z_1^2 + 6y_2^2 - 12y_1y_2$.

г) $Q_1(x) = 9x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,
$Q_2(y) = 2y_1^2 + 5y_2^2 - 3y_3^2 + 10y_1y_2 - 22y_1y_3 - 10y_2y_3$.

д) $Q_1(x) = 6x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 - 4x_2x_3$,
$Q_2(y) = 3y_1^2 + 9y_2^2 + 7y_3^2 + 12y_1y_2 - 12y_1y_3 - 24y_2y_3$.

Дополнительно.

е) $Q_1(x) = x_1^2 + 29x_2^2 - 4x_1x_2$, $Q_2(y) = 6y_1^2 + 7y_2^2 - 12y_1y_2$.

ж) $Q_1(x) = 10x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 - 14x_1x_2 + 6x_1x_3 - 4x_2x_3$,
$Q_2(y) = 4y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 - 4y_2y_3$.

з) $Q_1(x) = -2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3$,
$Q_2(y) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2 + 2y_1y_2 - 6y_1y_3 - 2y_2y_3$.

и) $Q_1(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3$,
$Q_2(y) = 4y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 2y_1y_2 + 2y_1y_3 - 4y_2y_3$.

к) $Q_1(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$,
$Q_2(y) = 6y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 + 2y_1y_2 - 10y_1y_3 - 4y_2y_3$.

л) $Q_1(x) = 2x_1^2 + 7x_2^2 + 15x_3^2 + 8x_1x_2 - 12x_1x_3 - 20x_2x_3$,

$Q_2(y)=2y_1^2+7y_2^2+y_3^2-8y_1y_2+4y_1y_3-14y_2y_3.$

м) $Q_1(x)=3x_1^2+9x_2^2+7x_3^2+12x_1x_2-12x_1x_3-34x_2x_3,$

$Q_2(y)=14y_1^2+3y_2^2+9y_3^2+12y_1y_2-20y_1y_3-12y_2y_3.$

Дополнительные задачи

14. Квадратичная форма в базисе $f=\{f_1,f_2\}$ имеет вид $Q(x)=4x_1^2-8x_2^2$. Какой вид она будет иметь в базисе $g=\{2f_1,2f_2\}$?

15. Матрица квадратичной формы в базисе $\{f_1,f_2,f_3\}$ имеет вид $B_f=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Вычислите матрицу квадратичной формы в базисе $g=\{f_2,-f_3,f_1\}$.

16. Сигнатура квадратичной формы $\{2,\ 1,\ 0\}$. Может ли на главной диагонали матрицы формы стоять число нуль?

17. Ответьте без вычислений на вопрос, может ли билинейная форма с матрицей $B_f=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ служить скалярным произведением?

18. Приведите примеры квадратичных форм $Q(x)$ в R^3 с заданным множеством $X=\{x:Q(x)=0\}$.

а) X совпадает с плоскостью $\pi:\{3x_1-7x_2+4x_3=0$;

б) X совпадает с прямой $L\{a(1;-2;-1)\}$;

в) X совпадает с объединением двух плоскостей $\pi_1=\{2x_1+x_2-x_3=0$ и $\pi_2=\{2x_1-3x_2+2x_3=0$.

19. Приведите пример такой билинейной формы $B(x,y)$ в R^3, что:

1) множество векторов $M_1=\{x:\forall y\,|\,B(x,y)=0\}$ является плоскостью $\pi_1=\{2x_1+5x_2-9x_3=0$;

2) множество векторов $M_2=\{y:\forall x\,|\,B(x,y)=0\}$ является плоскостью $\pi_2=\{11y_1-7y_2+3y_3=0$.

20. $Q(x)$ – квадратичная форма в пространстве R^n. Докажите или опровергните следующие утверждения.

а) Множество $X=\{x:Q(x)=0\}$ может являться подпространством.

б) Множество $X=\{x:Q(x)=0\}$ всегда является подпространством.

21. Докажите, что для билинейной формы $B(x,y)$ в R^n множество

$$M=\{x:\forall y\,|\,B(x,y)=0\}$$

является линейным подпространством. Выразите $\dim(M)$ через характеристики матрицы формы.

22. $Q(x)$ – квадратичная форма в пространстве R^n. Докажите или опровергните следующие утверждения.

а) Если форма $Q(x)$ невырожденная, то для любого базиса $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ и для всех k выполнено $Q(g_k)\neq 0$.

б) Если форма $Q(x)$ невырожденная, то существует базис $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ такой, что для всех k выполнено $Q(g_k)\neq 0$.

в) Если существует базис $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ такой, что $Q(g_k)\neq 0$ для всех k, то форма $Q(x)$ невырожденная.

г) Если существует базис $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ такой, что $Q(g_k)=0$ для всех k, то форма $Q(x)$ вырожденная.

д) Если $Q(a)>0$ для некоторого a, то существует базис $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$, для которого $Q(g_k)>0$ для всех k.

23. Сигнатура квадратичной формы $\{2,\ 1,\ 0\}$. Может ли на главной диагонали матрицы формы стоять число нуль?

24. У матрицы квадратичной формы на главной диагонали стоят числа 2, 4 и –3, ранг матрицы равен двум. Какова размерность максимального подпространства, на котором форма тождественно равна нулю?

25. При каком условии на k можно утверждать, что квадратичная форма, в матрице которой на пересечении первых k строк и k столбцов стоят нули, вырожденная?

26. Какова сигнатура квадратичной формы, заданной выражением

$$Q(x)=(x_1+x_2)^2-x_1^2-x_2^2?$$

27. Дана симметричная билинейная форма $B(x,y)$ в R^n. Чему равна максимальная размерность подпространства, на котором $B(x,y)$ может задавать скалярное произведение?

28. Приведите пример отрицательно определенной симметричной билинейной формы в E^2, для которой $B(a,b)=1$, где $a=(3;\ 2)$, $b=(4;\ 1)$.

29. $Q(x)$ – квадратичная форма в пространстве R^n. Докажите или опровергните следующие утверждения.

а) Если $Q(a)<0$ и $Q(b)<0$, то форма $Q(x)$ отрицательно определена на $L\{a,b\}$.

б) Если в любом базисе $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ найдется вектор g_k, для которого $Q(g_k)>0$, то $Q(x)$ положительно определена.

в) Если в некотором базисе $g=\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ выполняется $Q(g_k)>0$ для всех g_k, то $Q(x)$ положительно определена.

30. Какова сигнатура квадратичной формы $Q(x)=\sum_{j=1}^{n}a_jx_j\cdot\sum_{k=1}^{n}b_kx_k$?

(Векторы $a=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ и $b=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ ненулевые и неколлинеарные).

31. Плоскость L задана в базисе $e=\{e_1,e_2,e_3\}$ уравнением $x_3-2x_1+x_2=0$. После подстановки $x_3=2x_1-x_2$ в форму $Q(x_1,x_2,x_3)$ выражение

$$Q_1(x_1,x_2\}=Ax_1^2+2Bx_1x_2+Cx_2^2$$

не будет содержать переменную x_3. Укажите тот базис $f=\{f_1,f_2\}$ подпространства L, в котором ограничение формы Q на подпространство L имеет вид

$$Q_1(y_1,y_2\}=Ay_1^2+2By_1y_2+Cy_2^2.$$

32. Является ли множество невырожденных квадратичных форм в пространстве R^3 линейным многообразием в пространстве всех билинейных форм?

33. Докажите, что если в матрице квадратичной формы найдется отрицательный главный минор второго порядка, то эта форма знакопеременная.

Ответы на типовые задачи

1. а) $B_f=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$. б) $B_f=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

в) $B_f=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 11\end{pmatrix}$. г) $B_f=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 7 & -8\end{pmatrix}$.

2. а) Например, $Q(x)=(x_1-2x_2)^2-6x_2^2=y_1^2-6y_2^2;\begin{cases}x_1=y_1+2y_2\\ x_2=y_2\end{cases}$.

б) Например, $Q(x)=11x_1^2-2(2x_1+x_2)^2=11y_1^2-2y_2^2;$

$$\begin{cases}x_1=y_1\\ x_2=-2y_1+y_2\end{cases}.$$

в) Например, $Q(x)=-3(x_1+x_2)^2+3(x_1-x_2)^2=-3y_1^2+3y_2^2;$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)\\ x_2=\frac{1}{2}(y_1-y_2)\end{cases}.$$

г) Например, $Q(z)=-z_1^2+z_2^2+z_3^2;\begin{cases}x_1=z_1\\ x_2=\frac{1}{2}(-z_1+z_2)\\ x_3=-z_1+z_3\end{cases}.$

д) Например, $Q(z)=z_1^2-z_2^2$; $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{4}(z_1+z_2+2z_3) \\ x_2=\dfrac{1}{2}(z_1-z_2) \\ x_3=z_3 \end{cases}$.

е) Например, $Q(x)=(2x_1+3x_2)^2=y_1^2$; $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}(y_1-3y_2) \\ x_2=y_2 \end{cases}$.

ж) Например, $Q(x)=3\left(x_1-\dfrac{3x_2}{2}\right)^2-\dfrac{55}{4}\cdot x_2^2=3y_1^2-55y_2^2$;

$\begin{cases} x_1=y_1+3y_2 \\ x_2=2y_2 \end{cases}$.

з) Например, $Q(z)=-z_1^2-z_2^2-z_3^2$; $\begin{cases} x_1=z_1-z_3 \\ x_2=z_1+z_2-3z_3 \\ x_3=z_3 \end{cases}$.

и) Например, $Q(z)=z_1^2-13z_2^2+z_3^2$; $\begin{cases} x_1=z_1-4z_2 \\ x_2=z_2 \\ x_3=z_1-4z_2+z_3 \end{cases}$.

3. а) Например, $Q(y)=-2y_2^2+y_3^2$; $f=\{f_1(1;1;2), f_2(0;1;3), f_3(0;0;1)\}$;

$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=-x_1+x_2 \\ y_3=x_1-3x_2+x_3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_1+y_2 \\ x_3=2y_1+3y_2+y_3 \end{cases}$; $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

б) Например, $Q(y)=y_2^2$; $f=\{f_1(1;-3;0), f_2(0;1;0), f_3(0;2;1)\}$;

$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=3x_1+x_2-2x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=-3y_1+y_2+2y_3 \\ x_3=y_3 \end{cases}$;

$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

в) Например, $Q(z)=z_1^2-z_2^2-z_3^2$;

$$f=\left\{f_1\left(\left(\frac{1}{2};0;\ \frac{1}{2}\right)\right),f_2\left(\frac{1}{2};0;-\frac{1}{2}\right),f_3\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)\right\};$$

$$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\ y_2=x_1\qquad -x_3\\ y_3=\qquad x_2\end{cases};\ \begin{cases}x_1=\frac{1}{2}z_1+\frac{1}{2}z_2+\frac{1}{2}z_3\\ x_2=\qquad\qquad\qquad z_3\\ x_3=\frac{1}{2}z_1-\frac{1}{2}z_2+\frac{1}{2}z_3\end{cases};\ T_{e\to f}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

г) Например, $Q(z)=z_1^2+z_2^2-2z_3^2+2z_4^2$;

$$f=\{f_1(1;0;0;0),f_2(-1;1;0;0),f_3(3;-2;1;0),f_4(-4;3;-1;1)\};$$

$$\begin{cases}z_1=x_1+x_2-x_3\\ z_2=\qquad x_2+2x_3-x_4\\ z_3=\qquad\qquad x_3+x_4\\ z_4=\qquad\qquad\qquad x_4\end{cases},\ \begin{cases}x_1=z_1-z_2+3z_3-4z_4\\ x_2=\qquad z_2-2z_3+3z_4\\ x_3=\qquad\qquad z_3-z_4\\ x_4=\qquad\qquad\qquad x_4\end{cases};$$

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix}1&1&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

д) Например, $Q(z)=Q_1(z)+Q_2(z)=\left(z_1^2+z_2^2\right)+\left(-z_3^2-4z_4^2+z_5^2\right)$;

$$f=\left\{\begin{matrix}f_1(1;0;0;0;0),f_2(0;0;1;0;2),f_3(0;0;-1;1;-1),\\ f_4(1;1;0;0;0),f_5(0;0;0;0;1)\end{matrix}\right\};$$

$$z_1=x_1+2x_4,\ z_2=x_4,\ z_3=x_2-x_3,\ z_4=x_3,\ z_5=2x_2-x_3+x_5;$$

$$x_1=z_1-2z_2,\ x_4=z_2,\ x_5=z_3-2z_4-z_5,\ x_2=z_4+z_5,\ x_3=z_5.$$

е) Например, $Q(y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$;

$$f=\left\{f_1(1;0;0),f_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),f_3\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\};$$

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3\\ y_2=\qquad x_2+x_3,\\ y_3=\qquad x_2-x_3\end{cases}\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\ x_2=\qquad \frac{1}{2}y_2+\frac{1}{2}y_3\\ x_3=\qquad \frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\end{cases};\ T_{e\to f}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

ж) Например, $Q(y)=208y_1^2-y_2^2-2y_3^2$;

$f=\{f_1(1;6;-1), f_2(0;1;0), f_3(0;-2;1)\}$;

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -4x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_3 = 10x_1 + x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = 24y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_3 = -10y_1 + y_3 \end{cases};$$

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 24 & 1 & 2 \\ -10 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

з) Например, $Q(y)=-5y_1^2+3y_2^2+7y_3^2$;

$f=\{f_1(1;0;0), f_2(2;1;0), f_3(-3;-2;1)\}$;

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}; \quad T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

и) Например, $Q(y)=2y_1^2+3y_2^2+5y_3^2$;

$f=\{f_1(1;1;0), f_2(0;1;0), f_3(1;-4;1)\}$;

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - 4y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}; \quad T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

к) Например, $Q(y)=2y_1^2-5y_2^2+3y_3^2$;

$f=\{f_1(1;0;1), f_2(-2;1;-3), f_3(0;0;1)\}$;

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 - 3y_2 + y_3 \end{cases}; \quad T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. а) Например, $Q(y)=y_1^2-y_2^2-y_3^2$, $P=(1,2,0)$,

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 5/2\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{2} & 1 & 8/2\sqrt{13} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{13} \end{pmatrix} \text{ или } T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 5/2\sqrt{13} \\ 1 & 1 & 8/2\sqrt{13} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

б) Например, $Q(z)=-y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $P=(1,\ 2,\ 0)$,

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1 & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1 & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

в) Например, $Q(z)=y_1^2-y_2^2+y_3^2$, $P=(2,\ 1,\ 0)$,

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & -8/\sqrt{29} & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & -4/\sqrt{29} & 1 \end{pmatrix}.$$

г) Например, $Q(z)=y_1^2-y_2^2+y_3^2$, $P=(2,\ 1,\ 0)$,

$$T_{e\to f}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -3/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

д) Например, $Q(y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $P=(2,\ 1,\ 0)$,

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

е) Например, $Q(y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$, $P=(2,\ 1,\ 0)$,

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{3} & -3/\sqrt{7} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

5. а) Например, $Q(y)=-y_1^2+y_2^2+24y_3^2-y_4^2+y_5^2$;

$$L_f^+=L_f^{+0}=L\{f_2,f_3,f_5\},\ L_f^+=L_f^{+0}:\begin{cases} x_1+5x_5=0 \\ x_2+\ x_4=0 \end{cases};$$

$$L_f^{00}=L\{f_1+f_2,f_4+f_5\},\ L_f^{00}:\begin{cases} 4x_1-x_3=0 \\ \qquad\quad x_4=0. \\ \qquad\quad x_5=0 \end{cases}$$

б) Например, $Q(y)=-y_1^2+y_2^2+y_4^2+y_5^2$;

$$L_f^+=L\{f_2,f_4,f_5\},\ L_f^+:\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_5=0 \\ \qquad\quad x_3 \qquad\ =0 \end{cases};$$

$$L_f^{00} = L\{f_1 + f_5, f_3\},\ L_f^{00}: \begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 \quad + 2x_5 = x_5 \\ \qquad x_2 \qquad\quad - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 \quad + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

в) Например, $Q(y) = 4y_1^2 - 7y_2^2 - y_4^2 + y_5^2$;

$$L_f^{+} = L\{f_1, f_5\},\ L_f^{+}: \begin{cases} x_2 + x_4 = 0 \\ \qquad x_3 = 0; \\ \qquad x_5 = 0 \end{cases} L_f^{+0} = L\{f_1, f_3, f_5\},$$

$$L_f^{+0}: \begin{cases} x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + \ x_4 = 0 \end{cases};\ L_f^{00} = L\{\sqrt{7}\cdot f_1 + 2f_2, f_3, f_4 + f_5\},$$

$$L_f^{00}: \begin{cases} 2x_1 - (2 + \sqrt{7})x_3 + (4 + 2\sqrt{7})x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

г) Например, $Q(y) = -y_1^2 + 4y_2^2 - 16y_3^2 + y_4^2 - y_5^2$;

$$L_f^{+} = L_f^{+0} = L\{f_2, f_4\},\ L_f^{+} = L_f^{+0}: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ \qquad x_4 = 0; \\ x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$L_f^{00} = L\{2f_1 + f_2, f_4 + f_5\},\ L_f^{00}: \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ \qquad x_4 = 0. \\ \qquad x_5 = 0 \end{cases}$$

д) Например, $Q_1(y) = y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2 + 2y_5^2$;

$$f = \left\{ \begin{matrix} f_1(1;0;0;0;0), f_2(0;1;0;0;0), f_3(-1;0;1;0;1), \\ f_4(0;-2;0;1;0), f_5(-2;0;0;0;1) \end{matrix} \right\};$$

$y_1 = x_1 - x_3 + 2x_5,\ y_2 = x_2 + 2x_4,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4,\ y_5 = -x_3 + x_5;$

$x_1 = y_1 - y_3 - 2y_5,\ x_2 = y_2 - 2y_4,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4,\ x_5 = y_3 + y_5;$

$$L_f^{-0} = L\{f_3, f_4\},\ L_f^{+}: \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0, \\ y_5 = 0 \end{cases} L_f^{+}: \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_4 \qquad = 0 \\ -x_3 + x_5 \qquad = 0 \end{cases}.$$

Например, $L_f^{00} = L\left\{f_4, \sqrt{5}f_1 + f_3\right\},\ L_f^{00} = \begin{cases} y_2 = 0 \\ y_5 = 0 \\ y_1 = \sqrt{5}y_3 \end{cases},$

$$L_f^{00} = \begin{cases} x_2 + 2x_4 & = 0 \\ -x_3 + x_5 & = 0. \\ x_1 - (1+\sqrt{5})x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

е) Например, $Q_1(y) = 3y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2 - y_4^2;$

$$f = \left\{ \begin{matrix} f_1(1;0;0;0;0), f_2(0;1;0;0;0), f_3(0;-3;1;0;0), \\ f_4(0;-2;0;0;1), f_5(0;-8;-2;0;1) \end{matrix} \right\};$$

$y_1 = x_1 + 2x_4,\ y_2 = x_2 + 3x_3 - 2x_5,\ y_3 = x_3 + 2x_5,\ y_4 = x_4,\ y_5 = x_5;$
$x_1 = y_1 - 2y_4,\ x_2 = y_2 - 3y_3 - 8y_5,\ x_3 = y_3 - 2y_5,\ x_4 = y_4,\ x_5 = y_5;$

$$L_f^{+} = L\{f_1, f_2\},\ L_f^{+} : \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 0, \\ y_5 = 0 \end{cases} L_f^{+} : \begin{cases} x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 \quad = 0. \\ x_5 \quad = 0 \end{cases}$$

$$L_f^{00} = L\{f_5, f_2 + f_4\},\ L_f^{00} = \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = y_4 \end{cases},\ L_f^{00} = \begin{cases} x_1 + 2x_4 & = 0 \\ x_3 + 2x_5 & = 0. \\ x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

ж) Например, $Q_1(y) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 7y_3^2 + 6y_5^2;$

$$f = \left\{ \begin{matrix} f_1(1;0;0;0;0), f_2(0;1;0;0;0), f_3(-1;0;1;0;0), \\ f_4(0;1;0;1;0), f_5(0;-1;0;0;1) \end{matrix} \right\};$$

$y_1 = x_1 - x_3 + 2x_5,\ y_2 = x_2 + 2x_4,\ y_3 = x_3,\ y_4 = x_4,\ y_5 = -x_3 + x_5;$
$x_1 = y_1 - y_3 - 2y_5,\ x_2 = y_2 - 2y_4,\ x_3 = y_3,\ x_4 = y_4,\ x_5 = y_3 + y_5;$

$$L_f^{-} = L\{f_1, f_2\},\ L_f^{-} : \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 0, \\ y_5 = 0 \end{cases} L_f^{-} : \begin{cases} x_3 & = 0 \\ x_4 & = 0. \\ -x_3 + x_5 & = 0 \end{cases}$$

$$L_f^{00} = L\{f_4, f_1 + f_2\},\ L_f^{00} = \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_5 = 0 \\ y_1 = y_2 \end{cases},$$

$$L_f^{00} = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$

6. а) знакопеременной;
б) отрицательно определенной;
в) знакопеременной;

г) неположительно определенной;
д) положительно определенной;
е) знакопеременной;
ж) отрицательно определенной;
з) неотрицательно определенной.

7. а) $p \in (-2,\ 3)$. б) $p \in (-6, -3)$.
в) $p \in (-8, -4)$. г) $p \in (4-2\sqrt{3},\ \ 4+2\sqrt{3})$.

8. а) $p=-2$, $\sqrt{3}x_1 = x_1 + x_2$.
б) $p=3$, $x_1 = \sqrt{2}(-2x_1 - x_2 + x_3)$.
в) $p=1$, $\sqrt{2}(-x_1 + x_2 + 3x_3) = \sqrt{3}(-2x_1 + x_3)$.
г) $p=-2$, $\sqrt{2}x_1 = \sqrt{3}(-x_1 + x_2 + 2x_3)$.

9. а) при $a \in (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=2$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=2$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=2$;
при $a \in (-2, +2)$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=3$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=3$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=1$;
при $a = \pm 2$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=2$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=3$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=2$.
б) при $a \in (-\infty, -3) \bigcup (5, +\infty)$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=2$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=3$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=3$;
при $a \in (-3, +5)$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=3$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=4$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=2$;
при $a=-3$, $a=5$: $\dim\left(L_f^{+}\right)=2$, $\dim\left(L_f^{+0}\right)=4$, $\dim\left(L_f^{00}\right)=3$.

10. а) Является. б) Не является. в) Не является.
г) Является. д) Не является. е) Является.
ж) Не является.

11. а) $p \in [1, +\infty)$. б) Ни при каком p. в) $p=1$.

12. а) $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1 & 0 & -2/\sqrt{6} \\ -1 & 1 & 4/\sqrt{6} \end{pmatrix}$; другой вариант $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.
б) Не может. в) Не может.
г) $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{7} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{7} & 1 & -1 \\ 1/\sqrt{7} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. д) $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. а) $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \sqrt{5}/2 & -4-\sqrt{5} \end{pmatrix}$. б) Нельзя.

в) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} -\sqrt{6}-\frac{4}{3} & \sqrt{6} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

г) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{5}+\frac{5\sqrt{3}}{2} & \sqrt{5} & -\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 2+3\sqrt{3} \end{pmatrix}$.   д) Нельзя.

е) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{2}{5}-\sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

ж) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3}-6\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} & -\sqrt{3}-3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.   з) Нельзя.

и) $T_{e\to f}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} -\sqrt{5}+3 & \sqrt{5}-6 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3\sqrt{5}-3 & -\sqrt{5}+6 & 3 \end{pmatrix}$

или $T_{e\to f}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2\sqrt{5}+3 & -6 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3\sqrt{5}-3 & \sqrt{5}+6 & 3 \end{pmatrix}$.

к) $T_{e\to f}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}+1 & 1 & -2 \\ -11\sqrt{3}-1 & -1 & 2+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

или $T_{e\to f}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-3 & 0 & 1 \\ -7\sqrt{3}+3 & \sqrt{3} & -2\sqrt{3}-1 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

л) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2\sqrt{2}-5 \\ 0 & 1 & 4\sqrt{2}+3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$$\text{м) } T_{e\to f} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{5} & -6\sqrt{5}+2 \\ \sqrt{5} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 0 & -\sqrt{5}+1 \end{pmatrix}.$$

Ответы на дополнительные задачи

14. $Q(y) = 16y_1^2 - 32y_2^2$.

15. $B_f = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

21. $\dim(M) = n - rank(B)$

23. Может.

24. $P^+ = 1,\ P^- = 1,\ P^0 = 1$.

26. Если в R^2, то $P^+ = 1,\ P^- = 1,\ P^0 = 0$

29в. Контрпример. Пусть $P^+ = n-1$, $P^0 = 1$, тогда форма $Q(x)$ неположительно определенная. Для формы $Q(x)$ есть единственная прямая $L \in R^n$, вне которой $Q(x) > 0$. Выберем базис, все векторы которого не лежат в L. Тогда для всех g_k имеем $Q(g_k) > 0$.

30. $P^+ = 1,\ P^- = 1,\ P^0 = n-2$.

31. Решение. Сделаем замену

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 - 2x_1 + x_2 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 + 2y_1 - y_2 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В новом базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ плоскость L будет задана уравнением $y_3 = 0$. После подстановки $y_3 = 0$ в выражение для $Q(y)$ останутся слагаемые

$$Q_1(y_1, y_2\} = A_1 y_1^2 + 2B_1 y_1 y_2 + C_1 y_2^2.$$

Из условий $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ следует $A_1 = A$, $B_1 = B$, $C_1 = C$. Следовательно, $\{f_1, f_2\}$ – искомый базис. Из матрицы перехода $T_{e\to f}$ получаем $f_1 = (1;\ 0;\ 2)$, $f_2 = (0;\ 1; -1)$.

XV. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Определения и формулы

Скалярным произведением в конечномерном линейном пространстве V называется симметричная положительно определенная билинейная форма с областью определения V. Скалярное произведение векторов x и y записывается в виде (x, y). Конечномерное пространство V с заданным в нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.

Если известна матрица B_f в базисе $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ той билинейной формы, которая задает скалярное произведение, то согласно общему выражению для билинейной формы

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_j y_k .$$

В матричном представлении $(x, y) = X_f^T \cdot B_f \cdot Y_f$.

Координатное пространство R^n со скалярным произведением, заданным в каноническом базисе e формулой $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, обозначается E^n и называется каноническим евклидовым пространством. В пространстве E^n матрица $B = E$, и поэтому $(x, y) = X^T \cdot Y$.

Длиной (модулем) вектора x в евклидовом пространстве считается неотрицательное число $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Угол φ между векторами задается формулой $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$. Векторы ортогональны, если $(x, y) = 0$.

Матрицей Грама $Gr(a)$ набора векторов $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ называется симметричная квадратная матрица порядка m, которая состоит из попарных скалярных произведений векторов набора: $g_{jk} = (a_j, a_k)$. Определитель этой матрицы $G(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ называется определителем Грама.

Если составить матрицу A размером $n \times m$ из столбцов A^k, являющихся координатами векторов a_k набора a, то $Gr(a) = A^T \cdot A$.

Для набора векторов $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, являющегося базисом евклидова пространства V, матрица Грама $Gr(f)$ совпадает с матрицей B скалярного произведения в базисе f.

Матрица Грама любого набора векторов неотрицательно определена. Если набор векторов a имеет ранг r, то $rank\left(Gr\left(a\right)\right)=r$. В частности, матрица Грама $Gr\left(a\right)$ невырожденная тогда и только тогда, когда набор a линейно независим.

Как следствие, набор a линейно независим тогда и только тогда, когда $G\left(a\right)>0$.

Любая неотрицательно определенная симметричная квадратная матрица G порядка m и ранга r является матрицей Грама некоторого набора векторов в пространстве размерности $n\geq r$. Как следствие, ее можно представить в виде $Gr\left(a\right)=A^T\cdot A$, где A – матрица размером $n\times m$ ранга r.

Пусть набор $a=\left\{a_1,a_2,\ldots,a_m\right\}$ линейно независим. Тогда расстояние ρ от конца вектора x до подпространства $L=L\left\{a_1,a_2,\ldots,a_m\right\}$ может быть вычислено из формулы, использующей определители Грама:

$$\rho^2=\left|\frac{G\left(a_1,a_2,\ldots,a_m,x\right)}{G\left(a_1,a_2,\ldots,a_m\right)}\right|.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3 задается билинейной формой

$$B\left(x,y\right)=5x_1y_1+5x_2y_2+x_3y_3-x_1y_2-x_2y_1+2x_1y_3+2x_3y_1-x_2y_3-x_3y_2.$$

а) Дополните вектор $f_1\left(1;1;0\right)$ до ортогонального базиса.

б) Ортогонализуйте набор векторов

$$g=\left\{g_1\left(1;0;0\right),g_2\left(3;0;-5\right),g_3\left(1;0;-2\right)\right\}.$$

в) Найдите вектор нормали к плоскости, заданной уравнением

$$L:\{x_1+x_2+x_3=0.$$

Решение. Проверка показывает, что матрица билинейной формы положительно определенная, поэтому скалярное произведение определено корректно. Пусть строки матрицы F размером $m\times n$ состоят из координат векторов набора $f=\left\{f_1,f_2,\ldots,f_m\right\}$. Тогда вектор X, ортогональный всем векторам набора f, удовлетворяет системе $F\cdot B_e\cdot X=0$.

а) Для вектора X, ортогонального f_1, получим уравнение

$$\left(1\ 1\ 0\right)\cdot\begin{pmatrix}5&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\cdot X=\left(4\ 4\ 1\right)\cdot X=0,\text{ или }\{4x_1+4x_2+x_3=0.$$

В качестве частного решения возьмем вектор $f_2(1;-1;0)$. Для вектора X, ортогонального векторам набора $\{f_1,f_2\}$, получим

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}4 & 4 & 1\\ 6 & -6 & 3\end{pmatrix}\cdot X=0.$$

Решением этой системы будет вектор $f_3(3;-1;-8)$. Искомый базис

$$f=\{f_1(1;1;0),f_2(1;-1;0),f_3(3;-1;-8)\}.$$

б) Положим $h_1=g_1$, $h_2=g_2-\lambda h_1$. Тогда $\lambda=\dfrac{(g_2,h_1)}{(h_1,h_1)}$. Вычислим скалярные произведения:

$$(g_2,h_1)=(3\ \ 0\ -5)\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=5,$$

$$(h_1,h_1)=(1\ 0\ 0)\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=5.$$

Итак, $\lambda=1$, тогда $h_2=g_2-h_1=(2;0;-5)$.

Теперь найдем $h_3=g_3-\lambda_1h_1-\lambda_2h_2$, где $\lambda_1=\dfrac{(g_3,h_1)}{(h_1,h_1)}$, $\lambda_2=\dfrac{(g_3,h_2)}{(h_2,h_2)}$. Вычислим

$$(g_3,h_1)=(0\ \ 1\ -2)\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-5,$$

$$(g_3,h_2)=(0\ \ 1\ -2)\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}=5,$$

$$(h_1,h_1)=5,\ (h_2,h_2)=(2\ \ 0\ -5)\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}=5.$$

Получим $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$. Следовательно,

$$h_3=g_3+h_1-h_2=(-1;1;3).$$

В результате ортогонализованный набор

$$h=\{h(1;0;0),f_2(2;0;-5),h_3(-1;1;3)\}.$$

в) Нормаль к плоскости $L = L\{f_1(1;-1;0), f_2(1;0;-1)\}$ должна удовлетворять системе

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 0.$$

Решением этой системы будет вектор $n(2;-1;-6)$.

Пример 2. Какая из матриц $B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ или $B_2 = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ может быть матрицей Грама для некоторого набора векторов f пространства E^3? Если может, то приведите пример такого набора.

Решение. Проверка с использованием критерия Сильвестра показывает, что матрица B_1 знакопеременная, а матрица B_2 положительно определенная. Следовательно, только матрица B_2 является матрицей Грама некоторого набора векторов. Наша задача — представить матрицу B_2 в виде $B_2 = A^T \cdot A$, где A – матрица размером 3×2, столбцы которой задают координаты векторов искомого набора в стандартном базисе *e*.

Разложение $B = A^T \cdot A$ строится с помощью следующего приема. Будем считать матрицу B матрицей положительно определенной квадратичной формы в стандартном базисе *e* пространства E^2. Согласно общей теории, существует базис f, в котором матрица формы имеет нормальный вид. Так как форма B положительно определенная, ее матрица B_f в базисе f единичная. Тогда, согласно формуле для матриц квадратичной формы в разных базисах, будем иметь

$$B_2 = T_{f\to e}^T \cdot E \cdot T_{f\to e} = T_{f\to e}^T \cdot T_{f\to e}, \text{ где } T_{f\to e} \text{ – матрица } 2\times 2.$$

Найдем матрицу $T_{f\to e}$, приведя квадратичную форму с матрицей B_2 к каноническому виду:

$$Q(x) = 14x_1^2 + 3x_2^2 + 12x_1x_2 = 3(2x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 = 2y_1^2 + 3y_2^2 = z_1^2 + z_2^2.$$

Здесь $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\cdot y_1 = \sqrt{2}\cdot x_1 \\ z_2 = \sqrt{3}\cdot y_2 = 2\sqrt{3}\cdot x_2 + \sqrt{3}\cdot z_2 \end{cases}$, тогда $T_{f\to e} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Мы получили, что набор векторов $\left\{f_1\left(\sqrt{2};2\sqrt{3}\right), f_2\left(0;\sqrt{3}\right)\right\}$ в пространстве E^2 образует нужную нам матрицу Грама. В итоге ответом будет служить набор

$$g = \left\{g_1\left(\sqrt{2};2\sqrt{3};0\right), g_2\left(0;\sqrt{3};0\right)\right\}.$$

То, что матрица Грама этого набора совпадает с B_2, можно проверить непосредственно.

Второй способ. Выберем в пространстве E^3 вектор $g_2\left(\sqrt{3};0;0\right)$, для которого $\left(g_2,g_2\right)=3$. Тогда для вектора $g_1\left(x,y,z\right)$ получим систему $\begin{cases}\sqrt{3}x & =6\\ x^2+y^2+z^2 & =14\end{cases}$. Получим $x=2\sqrt{3}$. Осталось положить $y=z=1$. В этом случае

$$g=\left\{g_1\left(2\sqrt{3};1;1\right),g_2\left(\sqrt{3};0;0\right)\right\}.$$

Пример 3. В пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше двух скалярное произведение задано формулой $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Примените процесс ортогонализации к набору многочленов

$$F=\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}=\{1+x,1-x,x^2\}.$$

(Указание. $\int\limits_a^b x^k dx=\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.)

Решение. На первом шаге положим $g_1=f_1,\ g_2=f_2-\lambda\cdot g_1$. Тогда $\lambda=\dfrac{\left(f_2,g_1\right)}{\left(g_1,g_1\right)}$. Вычислим числитель и знаменатель:

$$(f_2,g_1)=\int\limits_0^1(1-x)(1+x)dx=\int\limits_0^1(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3},$$

$$(g_1,g_1)=\int\limits_0^1(1+x)^2dx=\frac{(1+x)^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{7}{3}.$$

Получим $\lambda=\dfrac{2}{7}$, $g_2\left(x\right)=\left(1-x\right)-\dfrac{2}{7}\cdot\left(1+x\right)\cdot g_1=\dfrac{5-9x}{7}$.

На втором шаге положим $g_3=f_3-\lambda_1\cdot g_1-\lambda_2\cdot g_2$, где $\lambda_1=\dfrac{\left(f_3,g_1\right)}{\left(g_1,g_1\right)}$, $\lambda_2=\dfrac{\left(f_3,g_1\right)}{\left(g_2,g_2\right)}$. Вычислим скалярные произведения:

$$(f_3,g_1)=\int\limits_0^1 x^2(1+x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{12},$$

$$(f_3,g_2)=\int\limits_0^1\frac{x^2(5-9x)}{7}dx=\left(\frac{5x^3}{21}-\frac{9x^4}{28}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{12},$$

$$(g_2, g_2) = \int_0^1 \frac{(5-9x)^2}{49} dx = -\frac{(5-9x)^3}{27 \cdot 49}\Bigg|_0^1 = \frac{189}{27 \cdot 49} = \frac{1}{7}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = -\frac{7}{12},$$

$$g_3(x) = x^2 - \frac{1}{4} \cdot (1+x) + \frac{7}{12} \cdot \frac{5-9x}{7} \cdot g_1 = \frac{12x^2 - 12x + 2}{12} = \frac{6x^2 - 6x + 1}{6}.$$

Искомый набор

$$g_1 = 1 + x,\ g_2(x) = \frac{5-9x}{7},\ g_3(x) = \frac{6x^2 - 6x + 1}{6}.$$

Пример 4. Скалярное произведение в трехмерном пространстве V с базисом (f_1, f_2, f_3) задано матрицей Грама

$$G_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортогональный базис в ортогональном дополнении $L^{\perp}$ к подпространству $L = L\{a(0;\ 0;\ 1)\}$.

Решение. Вектор g_2, ортогональный вектору $g_1 = a$, удовлетворяет матричному уравнению

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 0, \text{ или } \{x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

В качестве частного решения возьмем вектор $g_2(1;1;0)$. Для вектора g_3, ортогонального g_1 и g_2, получим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = 0.$$

Его решением будет вектор $g_3(2;-3;-5)$. В результате ортогональный базис в пространстве $L^{\perp}$:

$$g = \{g_2(1;1;0), g_3(2;-3;-5)\}.$$

Пример 5. Используя определители Грама, найдите в E^3 расстояние от вектора $a(3;-2;-4)$ до подпространства

$$L = L\{\, b_1(3;\,2;1),\, b_2(-1;-3;\,2),\, b_3(1;\,4;-3)\}.$$

Решение. Сначала стандартным образом вычислим ранг набора $\{\, b_1, b_2, b_3\}$. Получим $rank\{\, b_1, b_2, b_3\} = \dim(L) = 2$. В частности, $L = L\{\, b_1, b_2\}$. Расстояние ρ от точки a до подпространства $L = L\{b, b_2\}$ дается формулой

$$\rho^2 = \left|\frac{G(b_1, b_2, a)}{G(b_1, b_2)}\right|.$$

Получим:

$$G(b_1, b_2, a) = \begin{vmatrix} 14 & -7 & 3 \\ -7 & 14 & -15 \\ 3 & -15 & 21 \end{vmatrix} = 441,\ G(b_1, b_2) = \begin{vmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{vmatrix} = 147,$$

$$\rho^2 = \frac{441}{147} = 3,\ \rho = \sqrt{3}.$$

Типовые задачи

1. Выберите одну из билинейных форм B_1 или B_2, которая может задавать скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3. Найдите базис подпространства L, ортогональный относительно этого скалярного произведения.

а) $B_1(x, y) = 2x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1,$
$B_2(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2,$
$L: \{x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$

б) $B_1(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 17x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 -$
$-5x_2y_3 - 5x_3y_2,$
$B_2(x, y) = 4x_1y_1 + x_2y_2 + 11x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2,$
$L: \{x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$

в) $B_1(x, y) = 9x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 5x_1y_3 - 5x_3y_1 -$
$-2x_2y_3 - 2x_3y_2,$
$B_2(x, y) = 2x_1y_1 + 9x_2y_2 + 6x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 -$
$-5x_2y_3 - 5x_3y_2,$
$L = L\{a_1(-1;2;1), a_2(3;1;-2)\}.$

г) $B_1(x,y) = 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 14x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 7x_1y_3 -$
$-7x_3y_1 - 6x_2y_3 - 6x_3y_2,$
$B_2(x,y) = 2x_1y_1 + 7x_2y_2 + 15x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 - 6x_1y_3 -$
$-6x_3y_1 - 10x_2y_3 - 10x_3y_2,$
$L: \{x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$

2. Проверьте, что билинейная форма $B(x,y)$ может задавать скалярное произведение в R^3. Дополните вектор f_1 до ортогонального базиса относительно этого скалярного произведения.

а) $B(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$
$f_1(1;0;1).$

б) $B(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 -$
$-2x_2y_3 - 2x_3y_2,$
$f_1(1;1;2).$

в) $B(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 +$
$+4x_2y_3 + 4x_3y_2,$
$f_1(3;2;1).$

г) $B(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 7x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2,$
$f_1 = (2;3;1).$

д) $B(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 14x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 +$
$+5x_2y_3 + 5x_3y_2,$
$f_1 = (-2;-1;1).$

3. Проверьте, что билинейная форма $B(x,y)$ может задавать скалярное произведение в R^3. Ортогонализуйте набор векторов f относительно этого скалярного произведения.

а) $B(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 -$
$-x_2y_3 - x_3y_2,$
$f = \{f_1(1;\ 2;\ 1), f_1(2;\ 1;\ 1), f_3(1;\ 2;\ 2)\}.$

б) $B(x,y) = 14x_1y_1 + 3x_2y_2 + 14x_3y_3 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1,$
$f = \{f_1(1;0;1), f_2(-1;3;2), f_3(4;0;-2)\}.$

в) $B(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 +,$
$+x_2y_3 + x_3y_2,$
$f = \{f_1(1;-2;-1), f_2(1;2;-3), f_3(2;1;-2)\}.$

г) $B(x,y)=14x_1y_1+40x_2y_2+17x_3y_3-22x_1y_2-22x_2y_1-3x_1y_3-3x_3y_1+$
$+14x_2y_3+14x_3y_2,$
$f=\{f_1(2;1;-1),f_2(0;1;0),f_3(1;0;0)\}.$

д) $B(x,y)=11x_1y_1+x_2y_2+13x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1-3x_1y_3-3x_3y_1,$
$f=\{f_1(0;1;0),f_2(2;0;3),f_3(-1;3;4)\}.$

4. Проверьте, что билинейная форма с матрицей B может задавать скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3. Укажите для этого скалярного произведения нормаль n к подпространству L.

а) $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $L=L\{a_1(1;-1;2),a_2(2;2;1)\}.$

б) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $L=L\{a_1(1;-1;2),a_2(2;2;1)\}.$

в) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $L:\{x_1+x_2-x_3=0.$

г) $B=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $L=L\{a_1(1;0;-1),a_2(2;1;1)\}.$

5. Проверьте, что билинейная форма $B(x,y)$ может задавать скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3. Для подпространства L, заданного СЛАУ в базисе e, постройте СЛАУ в базисе e для ортогонального дополнения $L^{\perp}$. Укажите нормаль n к подпространству L.

а) $B(x,y)=6x_1y_1+9x_2y_2+3x_3y_3-5x_1y_2-5x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1+$
$+5x_2y_3+5x_3y_2,$
$L:\{x_1-x_2-x_3=0.$

б) $B(x,y)=6x_1y_1+5x_2y_2+3x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1-4x_1y_3-4x_3y_1-$
$-x_2y_3-x_3y_2,$
$L:\{x_1+2x_2-x_3=0.$

в) $B(x,y)=7x_1y_1+x_2y_2+29x_3y_3-2x_1y_2-2x_2y_1+11x_1y_3+11x_3y_1-$
$-x_2y_3-x_3y_2,$

$L:\{x_1+2x_2+3x_3=0.$

г) $B(x,y)=4x_1y_1+9x_2y_2+3x_3y_3-5x_1y_2-5x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1+$
$+4x_2y_3+4x_3y_2,$
$L:\{x_1-x_2-x_3=0.$

6. В пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше 2, определенных на отрезке $[a,b]$, задано скалярное произведение $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$ (Указание. $\int\limits_a^b x^k dx=\dfrac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$.)

а) $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Дополните многочлен $f_1(x)=x$ до ортогонального базиса.

б) $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Задайте вектор нормали к плоскости $\pi=L\{1,x^2\}$.

в) $(f,g)=\int\limits_0^2 f(x)g(x)dx$. Ортогонализуйте набор многочленов $F=\{1,x+1,x^2-1\}$.

г) $(f,g)=\int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Ортогонализуйте набор многочленов $F=\{1+x,1-x,x^2\}$.

7. Какая из матриц B_1 или B_2 может быть матрицей Грама для некоторого набора векторов f пространства E^3? Если может, то приведите пример такого набора.

а) $B_1=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&10\end{pmatrix}$.

б) $B_1=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}5&1\\2&3\end{pmatrix}$.

в) $B_1=\begin{pmatrix}5&4\\4&3\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$.

г) $B_1=\begin{pmatrix}4&-5&2\\-5&6&3\\2&3&6\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&5&-1\\2&-1&14\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $B_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

е) $B_1 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 9 & 14 & -5 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

ж) $B_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 9 \\ 2 & 9 & 14 \end{pmatrix}$.

з) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 10 \\ 6 & 3 & 3 \\ 10 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

8. Используя определитель Грама, найдите в E^3 расстояние от вектора a до подпространства L.

а) $a(1;2;-1)$, $L = L\{\, b_1(2;-1;-2), b_2(-3;1;2), b_3(1;2;4)\}$.

б) $a(0;-2;1)$, $L = L\{\, b_1(2;-3;1), b_2(1;-2;-1), b_3(4;-5;5)\}$.

в) $a(1;1;5)$, $L = L\{\, b_1(4;3;-2), b_2(1;1;-1), b_3(5;3;-1)\}$.

г) $a(-1;2;3)$, $L = L\{\, b_1(1;-2;3), b_2(1;-1;1), b_3(-3;2;-1)\}$.

Дополнительные задачи

9. Запишите неравенство Коши—Буняковского для скалярного произведения, заданного матрицей Грама G.

10. Два набора $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ и $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ являются базисами в подпространствах L_1 и L_2пространства R^n. При каких соотношениях $L_2 = L_1^{\perp}$?

Ответы на типовые задачи

1. а) $B_2(x,y)$; например, $f_1(1;-1;0)$, $f_2(2;4;3)$.
   б) $B_1(x,y)$; например, $f_1(1;1;0)$, $f_2(0;2;1)$.
   в) $B_2(x,y)$; например, $f_1(-1;2;1)$, $f_2(61;-38;-49)$.
   г) $B_1(x,y)$; например, $f_1(-2;1;0)$, $f_2(25;-23;7)$.
2. а) Например, $f_2(1;0;0)$, $f_3(9;-4;1)$.
   б) Например, $f_2(0;1;0)$, $f_3(7;-10;-3)$.

в) Не может.

г) Например, $f_2(0;1;3)$, $f_3(13;-28;-6)$.

д) Например, $f_2(3;2;0)$, $f_3(4;7;-2)$.

3. а) $g=\{\,g_1(1;\ 2;\ 1),\ g_2(1;\ -1;\ 0),\ g_3(1;-1;\ 1)\}$.

б) $g=\left\{g_1(1;0;1), g_2(-2;3;1), g_3(-5;12;1)\right\}$.

в) Не может.

г) $g=\left\{g_1(2;1;-1), g_2(4;3;-2), g_3(3;2;-1)\right\}$.

д) $g=\left\{g_1(0;1;0), g_2(2;-2;3), g_3(-3;3;1)\right\}$.

4. а) $n=(2;-19;-33)$. б) $n=(21;-1;-7)$.

в) $n=(36;5;-14)$. г) $n=(12;-20;5)$.

5. а) $L^{\perp}:\begin{cases}4x_1+x_3=0\\ x_1+4x_2+3x_3=0\end{cases}$, $n=(4;\ 11;-16)$.

б) $L^{\perp}:\begin{cases}2x_1-x_3=0\\ 7x_1-3x_2-5x_3=0\end{cases}$, $n=(1;-1;\ 2)$.

в) $L^{\perp}=\begin{cases}x_1+x_2+8x_3=0\\ 4x_1+x_2+18x_3=0\end{cases}$, $n=(10;\ 14;-3)$.

г) $L^{\perp}=\begin{cases}2x_1-x_2+x_3=0\\ -x_1+4x_2+2x_3=0\end{cases}$, $n=(6;\ 5;-7)$.

6. а) $f=\{x, 3x-2, 6x^2-6x+1\}$. б) $n=15x^2-16x+3$.

в) $\{1, x-1, x^2-2x+2/3\}$. г) $\left\{1+x,\ \dfrac{5-9x}{7},\ \dfrac{6x^2-6x+1}{6}\right\}$.

7. а) B_2; например, $f=\left\{f_1(-1;2;0), f_2(3;1;0)\right\}$.

б) B_1; например, $f=\left\{f_1(1;1;1), f_2(1;-1;1)\right\}$.

в) B_2; например, $f=\left\{f_1(2;0;0), f_2(1;0;0)\right\}$.

г) B_2; например, $f=\{f_1(1;\ 0;\ 0), f_2(-2;\ 1;\ 0), f_3(2;\ 3;\ 1)\}$.

д) B_1; например, $f=\{f_1(1;\ 0;-2), f_2(-2;\ 1;\ 1), f_3(0;\ 0;\ 1)\}$.

е) B_1; например, $f=\left\{f_1(1;2;1), f_2(1;3;2), f_3(0;-1;-1)\right\}$.

ж) B_2; например, $f=\{f_1(1;\ 0;\ 0), f_2(3;\ 1;\ 0), f_3(2;\ 3;\ 1)\}$.

з) B_2; например, $f=\left\{f_1(2;1;3), f_2(1;1;1), f_3(1,-1;3)\right\}$.

8. а) $r=\sqrt{5}$. б) $r=\sqrt{7/5}$. в) $r=\sqrt{6}$. г) $r=\sqrt{6}$.

XVI. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

Определения и формулы

Линейным оператором в линейном действительном пространстве V называется отображение $A:V \to V$, удовлетворяющее условиям линейности:

(1) для любых $x \in V$, $y \in V$ выполняется $A(x+y)=A(x)+A(y)$;

(2) для любого $x \in V$ и любого $\lambda \in R$ выполняется $A(\lambda x)=\lambda A(x)$.

Вместо $y=A(x)$ в большинстве случаев пишут $y=Ax$.

Линейный оператор переводит нуль-вектор в нуль-вектор.

Линейные операторы в одном и том же в линейном пространстве можно складывать и умножать на число. С этими операциями множество всех линейных операторов в линейном пространстве V размерности n является линейным пространством размерности n^2.

В пространстве всех линейных операторов в линейном пространстве V можно определить ассоциативную операцию умножения, заданную формулой $(AB)x=A\big(B(x)\big)$. Эта операция дистрибутивна относительно сложения операторов. В общем случае умножение операторов некоммутативно.

Линейный оператор E, действующий по формуле $Ex=x$, называется единичным оператором.

Линейный оператор называется обратным к оператору A (обозначение A^{-1}), если выполняются соотношения $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Линейный оператор однозначно задается набором значений $g_k=Af_k$ для всех векторов произвольного базиса пространства V.

Матрицей линейного оператора A в базисе $f=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ (обозначение A_f) называется квадратная матрица порядка n с элементами a_{jk}, k-й столбец которой состоит из коэффициентов разложения вектора Af_k по базису f:

$$Af_k=\sum_{j=1}^{n} a_{jk} f_j .$$

Соответствие операторов и матриц порядка n для любого базиса взаимно однозначное. Сумме операторов и произведению оператора на число соответствует сумма матриц и произведение матрицы на число. Произведению операторов соответствует произведение матриц.

Матрица единичного оператора в любом базисе единичная. Матрица обратного оператора в любом базисе является обратной к матрице исходного оператора. Обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда матрица оператора A в каком-то базисе невырожденная.

Если x_f и y_f – вектор-столбцы координат векторов x и y, A_f – матрица линейного оператора A, то действие оператора задается матричной формулой $y_f = A_f \cdot x_f$.

Матрицы A_f и A_g линейного оператора в разных базисах f и g связаны соотношением $A_g = T_{g\to f} \cdot A_f \cdot T_{f\to g}$, где $T_{f\to g}$ – матрица перехода от базиса f к базису g, $T_{g\to f}$ – матрица перехода от базиса g к базису f.

Ранг и определитель матрицы оператора во всех базисах одинаковы. В частности, если матрица оператора невырожденная в каком-то базисе, она невырожденная во всех базисах.

Образом линейного подпространства L для линейного оператора A называется множество всех векторов $y \in V$, представимых в виде $y = Ax$, где $x \in L$. Обозначение образа $A(L)$. Образ любого линейного подпространства является линейным подпространством. Образ $A(V)$ всего пространства V называется образом оператора и обозначается $Im(A)$.

Прообразом линейного подпространства L для линейного оператора A (обозначение $A^{-1}(L)$) называется множество всех векторов $x \in V$, для которых $Ax \in L$. Прообраз любого линейного подпространства является линейным подпространством.

Прообраз нуль-вектора называется ядром оператора и обозначается $Ker(A)$.

Рангом оператора называется число $rank(A) = \dim(Im(A))$. Ранг оператора совпадает с рангом матрицы оператора в любом базисе.

Линейный оператор называется невырожденным, если $\dim(Ker(A)) = 0$. В противном случае оператор называется вырожденным.

Линейный оператор является невырожденным тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном базисе невырожденная.

Для оператора A в пространстве V выполняется соотношение

$$\dim(Im(A)) + \dim(Ker(A)) = \dim(V) = n.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определите, является ли отображение A линейным оператором в пространстве R^2 (обозначения: $x = (x_1, x_2)$, векторы a, b произвольные).

а) $A(x) = (x_1, x_2 + 1)$; б) $A(x) = (x_1, |x_2|)$;

в) $A(x)=(x,a)\cdot a$; г) $A(x)=(x,a)\cdot x$;

д) $A(x)=x-2(x,a)\cdot a$; е) $A(x)=(x_1^2,\ 2x_2)$;

ж) $A(x)=(x_1-x_2,x_2+2x_1)$.

Указание.

1. Для отрицательного ответа достаточно невыполнения необходимого условия $A\left(\overline{0}\right)=\overline{0}$.

2. Оператор является линейным, если его действие в матричном виде задается формулой $y_f=A\cdot x_f$.

3. Проверка по определению: для всех $x,y\in V$ выполняется

$$A\left(\lambda x+\mu y\right)=\lambda\cdot A\left(x\right)+\mu\cdot A\left(y\right).$$

Решение.

а) Не является, так как $A(\overline{0})\neq\overline{0}$.

б) Не является, так как $A(\lambda x)\neq\lambda\cdot A(x)$ для $x=(1;\ 1)$ и $\lambda=-1$.

в) Является. Проверим по определению

$$A\left(\lambda x+\mu y\right)=\left(\lambda x+\mu y,a\right)\cdot a=\left(\left(\lambda x,a\right)+\left(\mu y,a\right)\right)\cdot a=$$
$$=\lambda\left(x,a\right)\cdot a+\mu\left(y,a\right)\cdot a=\lambda A\left(x\right)+\mu A\left(y\right).$$

Замечание. Если $|a|=1$, то A – оператор ортогонального проектирования на прямую $L\{a\}$).

г) Не является, так как $A(2x)=4\cdot A(x)\neq 2\cdot A(x)$.

д) Является, так как отображение A – линейная комбинация двух линейных операторов: единичного оператора $A(x)=x$ и оператора пункта в).

е) Не является, так как $A(\lambda x)\neq\lambda\cdot A(x)$ при $x=(1;\ 0)$ и $\lambda=2$.

ж) Является, так как оператор A задается матричной формулой

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

Пример 2. Оператор $Y=F(X)$ задан в пространстве квадратных матриц второго порядка формулой:

$$\text{если } X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix},\text{ то } Y=F\left(X\right)=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{22}&x_{12}-x_{21}\\x_{21}-x_{12}&x_{11}+x_{22}\end{pmatrix}.$$

Докажите, что он линейный, и постройте матрицу этого оператора в каком-нибудь базисе. Укажите ядро $Ker(F)$ и образ $\mathrm{Im}(F)$ оператора F.

Решение. (1) Пусть $U=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}v_{11}&v_{12}\\v_{21}&v_{22}\end{pmatrix}$. Проверим линейность:

$$F(U+V)=\begin{pmatrix}(u_{11}+v_{11})+(u_{22}+v_{22}) & (u_{12}+v_{12})-(u_{21}+v_{21})\\(u_{21}+v_{21})-(u_{12}+v_{12}) & (u_{11}+v_{11})+(u_{22}+v_{22})\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11}+u_{22} & u_{12}-u_{21}\\u_{21}-u_{12} & u_{11}+u_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_{11}+v_{22} & v_{12}-v_{21}\\v_{21}-v_{12} & v_{11}+v_{22}\end{pmatrix}=F(U)+F(V).$$

$$F(\lambda U)=F\left(\begin{pmatrix}\lambda u_{11} & \lambda u_{12}\\\lambda u_{21} & \lambda u_{22}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda u_{11}+\lambda u_{22} & \lambda u_{12}-\lambda u_{21}\\\lambda u_{21}-\lambda u_{12} & \lambda u_{11}+\lambda u_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\lambda\cdot\begin{pmatrix}u_{11}+u_{22} & u_{12}-u_{21}\\u_{21}-u_{12} & u_{11}+u_{22}\end{pmatrix}=\lambda\cdot F(U).$$

(2) Сопоставим матрице $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ вектор-столбец $X'=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\x_{22}\end{pmatrix}\in R^4$.

В этом представлении действие оператора в матричной форме

$$F(X')=F\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}+x_{22}\\x_{12}-x_{21}\\x_{21}-x_{12}\\x_{11}+x_{22}\end{pmatrix}=F_e\cdot X',\text{ где } F_e=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(3) $rank(F_e)=2$, поэтому

$\dim(Im(F))=2$, $\dim(Ker(F))=4-2=2$.

Нетрудно проверить, что

$$Ker(F)=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\},\ Im(F)=L\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Пример 3. В пространстве R^3 базис f и набор g заданы своими координатами в стандартном базисе e:

$f=\{f_1(3;\ 2;\ 1), f_2(2;\ 1;\ 4), f_3(3;\ 2;\ 2)\}$,

$g=\{g_1(1;-2;\ 2), g_2(1;\ 1;-3), g_3(-1;\ 0;\ 1)\}$.

Линейный оператор A задан формулой $Af_k=g_k$. Найдите матрицы A_e и A_f оператора A в базисах e и f. В базисе e выразите вектор $d=Ab$, где $b_e=(3;\ 2;\ 1)$.

Решение. (1) Определим два оператора F и G, заданные условиями $F(e_k)=f_k$, $G(e_k)=g_k$. Для всех e_k верно $A(F(e_k))=G(e_k)=g_k$. Следовательно, $G = A \cdot F$. Операторному равенству соответствует матричное равенство $G_e = A_e \cdot F_e$ в базисе e. Тогда для матрицы A_e:

$$A_e = G_e \cdot F_e^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -21 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Так как $T_{e \to f} = F_e$, то

$$A_f = T_{f \to e} \cdot (G_e \cdot F_e^{-1}) \cdot T_{e \to f} = F_e^{-1} \cdot G_e \cdot F_e^{-1} \cdot F_e = F_e^{-1} \cdot G_e.$$

Получим

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -7 \\ 5 & -1 & -2 \\ -15 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(3) Действие оператора в матричной форме

$$d_e = A_e b_e = \begin{pmatrix} 15 & -21 & -2 \\ -4 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В пространстве R^3 в стандартном базисе e заданы матрица оператора A и линейное многообразие H:

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \ H : \{x_1 - 3x_2 - x_3 = -2.$$

Для многообразия $A(H)$ укажите размерность и параметрическое представление в базисе e.

Решение. Вектор $c = (-1;\ 0;\ 1)$ является частным решением СЛАУ из одного уравнения $H : \{x_1 - 3x_2 - x_3 = -2$. ФНР соответствующего однородного уравнения составляют векторы $a_1 = (3;\ 1;\ 0)$, $a_2 = (1;\ 0;\ 1)$. Тогда

$$H = c + L\{a_1, a_2\},\ A(H) = Ac + L\{Aa_1, Aa_2\}.$$

Вычислим координаты векторов $b_1 = A(a_1)$, $b_2 = A(a_2)$, $c_1 = A(c)$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $b_1 = b_2$, поэтому

$$A(H) = c_1(-1;\ 0;\ 1) + L\{\ b_1(3;\ 2;\ 1)\},\ \dim(A(H)) = 1.$$

Пример 5. Линейный оператор A задан своей матрицей в стандартном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3\}$:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдите его матрицу A_f в базисе $f = \{e_3, e_1, -e_2\}$.

Решение. Из условия следует, что

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда } T_{f\to e} = (T_{e\to f})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_f = T_{f\to e} \cdot A_e \cdot T_{e\to f} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другой способ. Рассмотрим разложения

$$Af_1 = Ae_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3 = f_1 + 3f_2 - 2f_3,$$

$$Af_2 = Ae_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 = -f_1 + 2f_2 - 3f_3,$$

$$Af_3 = -Ae_2 = 2e_1 - e_2 + e_3 = f_1 + 2f_2 + f_3.$$

По определению матрицы оператора $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$

Пример 6. Приведите пример матрицы A_e в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такого линейного оператора A в пространстве R^4, для которого:

а) ядро $Ker(A)=L\{e_1+e_2-2e_4,\ e_2-e_3+e_4,\ e_1+e_3-3e_4\}$, образ $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1-e_3+e_4,\ e_1-e_2+e_3,\ 2e_1-e_2+e_4\}$.

б) ядро $Ker(A)=L\{e_1+e_2-e_4,\ e_2-e_3+e_4,\ e_1+2e_2-e_3\}$, образ $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1+e_2-e_3,\ e_1-e_2+e_4,\ e_2-e_3-e_4\}$.

Решение. а) Необходимое условие выполнено:

$$\dim\left(Ker\left(A\right)\right)+\dim\left(\mathrm{Im}\left(A\right)\right)=2+2=4.$$

Оно оказывается и достаточным. Базис $\{f_1,f_2\}$ в $Ker\left(A\right)$ следует дополнить двумя векторами $\{f_3,f_4\}$ до базиса в R^4. Оператор A должен удовлетворять соотношениям

$$Af_1=g_1=\overline{0},\ Af_2=g_2=\overline{0},\ Af_3=g_3,\ Af_4=g_4,$$

где $\{g_3,g_4\}$ – базис в $Im\left(A\right)$. Например,

$$f_1=\left(1;1;0;-2\right),\ f_2=\left(0;1;-1;1\right),\ f_3=\left(1;0;0;0\right),\ f_4=\left(0;0;0;1\right),$$

$$g_3=\left(1;-1;0;1\right),\ g_4=\left(1;-1;1;0\right).$$

Тогда матрица A_e должна удовлетворять матричному уравнению

$$A_e\cdot\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&-1&0&0\\-2&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\ A_e=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\-1&-1&-2&-1\\0&2&3&1\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}.$$

б) Такого оператора не существует, так как необходимое условие не выполняется:

$$\dim\left(Ker\left(A\right)\right)+\dim\left(\mathrm{Im}\left(A\right)\right)=2+3\neq 4.$$

Пример 7. Составьте в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2\}$ евклидова пространства E^2 матрицы следующих операторов.

а) Оператора проектирования на ось OX.

б) Оператора проектирования на прямую $x_1=x_2$.

в) Оператора проектирования на прямую $x_1=2x_2$.

г) Оператора зеркального отражения относительно прямой $x_1=2x_2$.

Решение. а) $Ae_1=e_1,\ Ae_2=\overline{0}$, следовательно, $A_e=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

б) Проекции векторов e_1 и e_2 на биссектрису первого координатного угла попадают в точку с координатами (½, ½), то есть

$$Ae_1 = \frac{1}{2}\cdot(e_1+e_2),\ Ae_2 = \frac{1}{2}\cdot(e_1+e_2),\text{ откуда } A_e = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

в) Используем формулу оператора проектирования $Ax = \dfrac{(x,a)}{(a,a)}\cdot a$, где $a=(2;\ 1)$, для вычисления образов векторов базиса $e=\{e_1,e_2\}$:

$$Ae_1 = \frac{2}{5}a = \frac{2}{5}\cdot(2e_1+e_2) = \frac{4e_1+2e_2}{5},\ Ae_2 = \frac{1}{5}a = \frac{1}{5}\cdot(2e_1+e_2) = \frac{2e_1+e_2}{5}.$$

Следовательно, $A_e = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

г) Выберем ортогональный базис $f=\{f_1(2;\ 1), f_2(1;-2)\}$, тогда

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\ T_{f\to e} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

В базисе f имеем $Af_1 = f_1$, $Af_2 = -f_2$. В результате

$$A_f = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$A_e = T_{e\to f}\cdot A_f\cdot T_{f\to e} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

Пример 8. В пространстве E^3 задана плоскость $\pi:\{x_1+2x_2-2x_3=0$. Постройте ортогональный базис f, два базисных вектора которого лежат в плоскости π. Укажите матрицу перехода $T_{e\to f}$. Укажите матрицу в базисе e оператора P ортогонального проектирования на плоскость π и оператора S зеркального отражения относительно плоскости π.

Решение. Нормалью к плоскости π служит вектор $f_1=(1;\ 2;-2)$. В плоскости π выберем два вектора, которые были бы ортогональны друг другу. Если выбрать $f_2=(2;\ 1;\ 2)$, то третий вектор является решением СЛАУ $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\ 2x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$, откуда $f_3=(-2;\ 2;\ 1)$. Матрицы перехода

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix},\ T_{f\to e} = T_{e\to f}^{-1} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Из определения операторов проектирования и зеркального отражения следует, что матрицы операторов P и S в базисе f имеют вид

$$P_f=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, S_f=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

В базисе e, используя формулы $P_e=T_{e\to f}P_fT_{f\to e}$, $S_e=T_{e\to f}S_fT_{f\to e}$, получим:

$$P_e=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}8&2&2\\2&5&4\\2&4&5\end{pmatrix},$$

$$S_e=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}7&4&4\\4&1&8\\4&8&1\end{pmatrix}.$$

Пример 9. Вычислите:

а) $A^{100}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}^{100}$.   б) $A^{99}=\begin{pmatrix}3&-1\\5&-3\end{pmatrix}^{99}$.

Решение. а) Оператор

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)&-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)&\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}$$

является комбинацией поворота с растяжением. Значит, при возведении в степень 100 множитель 2 возводится в степень 100, а 100 поворотов на угол $\phi=-\frac{\pi}{6}$ дают поворот на угол $\phi=-\frac{100\pi}{6}=-16\pi-\frac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$A^{100}=2^{100}\cdot\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)&-\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\\\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)&\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\end{pmatrix}=2^{100}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

б) Можно убедиться в том, что

$$A^2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=4E.$$

Следовательно,

$$A^{99}=(A^2)^{49}\cdot A=4^{49}\cdot A=2^{98}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}.$$

Типовые задачи

1. Определите, какие операторы в пространстве R^2 являются линейными (обозначения: $x=(x_1;x_2)$, a,b – произвольные фиксированные ненулевые векторы).

а) $A(x)=\bar{0}$. б) $A(x)=2x$
в) $A(x)=a$. г) $A(x)=3x_2\cdot x$.
д) $A(x)=\dfrac{x}{|x|}$. е) $A(x)=x_2\cdot a$.
ж) $A(x)=(a,x)\cdot a$. з) $A(x)=(x_1+x_2;\ 2x_1-x_2)$.

Дополнительно.

и) $A(x)=x-2(x,a)\cdot a$. к) $A(x)=((a,x);x_1)$.
л) $A(x)=(x_1^2;\ 2x_2)$. м) $A(x)=(2x_1;\ x_1x_2)$.
н) $A(x)=3x_2\cdot x$. о) $A(x)=((a,x);(b,x))$.
п) $A(x)=(a,x)\cdot x$. р) $A(x)=|(b,a)|\cdot x$.
с) $A(x)=(x,a)\cdot b$. т) $A(x)=(x_1;\ |x_2|)$.
у) $A(x)=(0;(a,x))$. ф) $A(x)=(0;x_1+x_2)$.
х) $A(x)=((a,x);x_1)$. ц) $A(x)=|x|\cdot a$.
ч) $A(x)=(x_2;2x_1)$. ш) $A(x)=(|x_1|;|x_2|)$.
щ) $A(x)=(-x_2;x_1)$. э) $A(x)=(x_1;1+x_2)$.
ю) $A(x)=|a|\cdot x$. я) $A(x)=(3x_2;0)$.

2. Определите, какие операторы в пространстве R^3 являются линейными (обозначения: $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$, a,b – произвольные фиксированные векторы).

а) $A(x)=x_3\cdot x$. б) $A(x)=(0;x_1;\min(x_2,x_3))$.
в) $A(x)=(a,x)\cdot a$. г) $A(x)=((a,x);x_1;0)$.
д) $A(x)=(x,a)\cdot b$. е) $A(x)=(2x_2;-x_1;0)$.
ж) $A(x)=x_3\cdot|b|\cdot a$. з) $A(x)=(2x_1;\ x_1;-x_1)$.

3. В базисе e заданы вектор x и матрица A_e оператора A. Найдите вектор $y=Ax$.

а) $A_e=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $x=(2;-5)$. б) $A_e=\begin{pmatrix}9 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $x=(3;-1)$.

в) $A_e=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\3&2&-2\\1&-2&3\end{pmatrix}$, $x=(1;-2;-1)$. г) $A_e=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-4&1&5\\2&3&-3\end{pmatrix}$, $x=(4;\ 2;\ 1)$.

4. Линейный оператор A задан матрицей $A_e=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2,e_3\}$. Найдите его матрицу A_f в базисе f.

а) $f=\{e_3,e_1,-e_2\}$. б) $f=\{e_2,e_1+e_3,-e_1\}$.
в) $f=\{e_1-e_3,e_1,e_2\}$. г) $f=\{e_1,-e_3,e_1+e_2\}$.
д) $f=\{e_1-e_2,e_3,-e_2\}$.

5. Линейный оператор A задан матрицей A_e в стандартном базисе e. Найдите его матрицу A_f в базисе f.

а) $A_e=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$, $f=\{f_1(4;\ 5), f_2(3;\ 4)\}$.

б) $A_e=\begin{pmatrix}2&4\\5&-1\end{pmatrix}$, $f=\{f_1(-1;\ 2), f_2(3;-5)\}$.

в) $A_e=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $f=\{f_1(1;-1;-1), f_2(-2;\ 3;\ 3), f_3(1;-2;-1)\}$.

г) $A_e=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$, $f=\{f_1(3;\ 1;\ 0), f_2(1;\ 0;-1), f_3(1;\ 1;\ 1)\}$.

6. Найдите матрицу в базисе $f=\{f_1,f_2,f_3\}$ оператора дифференцирования D в пространстве многочленов $P_2[x]$ степени не выше второй.
а) $f_1=1+x$, $f_2=x-x^2$, $f_3=x^2-1$.
б) $f_1=1+3x+2x^2$, $f_2=2-x^2$, $f_3=1+2x+x^2$.
в) $f_1=1+2x^2$, $f_2=3+2x+5x^2$, $f_3=2+x+3x^2$.

7. Для оператора F, заданного формулой $y=F(x)$, где $x\in L_1$, $y\in L_2$, докажите, что он линейный, и постройте матрицу F_{gf} этого оператора. Укажите ядро $Ker(F)\in L_1$ и образ $\mathrm{Im}(F)\in L_2$ оператора F. Если не указаны конкретные базисы f и g в пространствах L_1 и L_2, в пространствах R^n, $M[m,n]$ и $P_n[x]$ подразумевается стандартный базис e.
а) $L_1=R^3$, $L_2=R^1$, $F((x_1;x_2;x_3))=x_1$.
б) $L_1=L_2=R^3$, $F((x_1;x_2;x_3))=(x_2;x_3;x_1)$.

в) $L_1 = L_2 = M\ [2,\ 2]$, F обнуляет в матрице X недиагональные элементы.

г) $L_1 = M\ [2,\ 2]$, $L_2 = M\ [2,\ 1]$, F оставляет в матрице X первый столбец.

д) $L_1 = M\ [2,\ 2]$, $L_2 = R$, $F(X) = x_{11}$.

е) $L_1 = L_2 = M\ [2,\ 2]$, $F(X) = B \cdot X$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

ж) $L_1 = L_2 = M\ [2,\ 2]$, $F(X) = X^T$,
$f = g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

з) $L_1 = P_3[x]$, $L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = p'(x)$.

и) $L_1 = P_1[x]$, $L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = p(x^2)$.

к) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = p(x+1)$.

л) $L_1 = L_2 = P_3[x]$, $F(p(x)) = p'(x)$.

Дополнительно.

м) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = (x \cdot p(x))'$.

н) $L_1 = P_2[x]$, $L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = (p(x^2))''$.

о) $L_1 = P_2[x]$, $L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = (p'(x^2))'$.

п) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = x \cdot p'(x)$.

р) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = (x \cdot p(x))' - x \cdot p'(x)$.

с) $L_1 = P_1[x]$, $L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = \int\limits_0^x p(t)dt$, $f = e$, $g = \{x+1, x-1, x^2-1\}$.

Указание. $\int\limits_a^b t^k dt = \dfrac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$.

т) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x p(t)dt$, $f = g = \{x+1, x-1, x^2-1\}$.

у) $L_1 = P_3[x]$, $L_2 = R^1$, $F(p(x)) = \int\limits_{-1}^1 p(x)dx$.

ф) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = \int\limits_0^x p'(t)dt$, $f = g = \{x+1, x-1, x^2-1\}$.

х) $L_1 = L_2 = P_2[x]$, $F(p(x)) = \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x t \cdot p'(t)dt$, $f = g = \{x+1, x-1, x^2-1\}$.

8. В пространстве E^2 в стандартном базисе $e = \{e_1, e_2\}$ укажите матрицу оператора ортогонального проектирования на прямую L.

а) $L = L\{e_1\}$. б) $L = L\{e_1 + e_2\}$.

в) $L:\{x_1-2x_2=0$. г) $L=L\{2e_2-e_1\}$.

9. В пространстве E^2 в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2\}$ укажите матрицу оператора зеркальной симметрии относительно прямой L.

а) $L:\{x_2=0$. б) $L:\{x_1-x_2=0$.

в) $L=L\{e_2-e_1\}$. г) $L:\{x_1+2x_2=0$.

10. В пространстве E^3 или E^4 в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2,...\}$ укажите матрицу оператора P ортогонального проектирования на подпространство π (прямую, двумерную плоскость или гиперплоскость).

а) $\pi=L\left\{a(1;-2;1)\right\}$. б) $\pi=L\left\{a(1;2;2)\right\}$.

в) $\pi:\left\{x_1+2x_2-2x_3=0\right.$. г) $\pi:\{x_1-x_2+x_3=0$.

д) $\pi:\{x_1-x_2-x_3-x_4=0$. е) $\pi:\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-x_4=0\end{cases}$.

Дополнительно.

ж) $\pi:\{x_1+2x_2-x_3=0$. з) $\pi:\{x_1-x_2+2x_3-x_4=0$.

и) $\pi:\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+2x_4=0\\x_1+2x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$.

11. В пространстве E^3 или E^4 в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2,...\}$ укажите матрицу оператора S зеркальной симметрии относительно подпространства π (прямой, двумерной плоскости или гиперплоскости).

а) $\pi=L\{a(2;-1;-1)\}$. б) $\pi=L\left\{a(2;2;1)\right\}$.

в) $\pi:\left\{x_1+2x_2-2x_3=0\right.$. г) $\pi:\{x_1-x_2+x_3=0$.

д) $\pi:\{x_1-x_2+x_3+x_4=0$. е) $\pi:\begin{cases}2x_1+x_2+x_3-2x_4=0\\3x_1+2x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases}$.

Дополнительно.

ж) $\pi:\{x_1-2x_2+2x_3=0$. з) $\pi:\{2x_1-x_2+x_3+2x_4=0$.

и) $\pi:\begin{cases}x_1+2x_2-x_3-2x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3-x_4=0\end{cases}$.

12. В стандартном базисе e задана матрица A_e оператора A и линейное подпространство L. Укажите размерность подпространства $A(L)$ и СЛАУ для него в базисе e.

а) $A_e=\begin{pmatrix}4&-3\\-3&0\end{pmatrix}$, $L:\{2x_1+3x_2=0$.

б) $A_e=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&3&-5\\1&-2&1\end{pmatrix}$, $L=L\{a_1(-3;\ 1;-1),\ a_2(1;-3;-1)\}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $L:\{2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$

г) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $L:\{2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$

13. В стандартном базисе e задана матрица A_e оператора A и линейное многообразие H. Укажите СЛАУ для многообразия $A(H)$ и его размерность.

а) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $H:\{3x_1 - 4x_2 = 1.$

б) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $H = c(1;\ 0;-1) + L\{a_1(-1;\ 1;\ 2),\ a_2(2;\ 3;-4)\}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $H:\{-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11.$

г) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $H:\{x_1 - 3x_2 - x_3 = -2.$

14. В пространстве R^3 в стандартном базисе e заданы другой базис f и набор g. Для линейного оператора A выполняется $Af_k = g_k$. Найдите матрицы A_e и A_f оператора A в базисах e и f.

а) $f = \{f_1(1;\ 0;\ 1), f_2(`1;-1;\ 0), f_3(1;\ 0;\ 0)\}$,
$g = \{g_1(3;\ 0;\ 3),\ g_2(1;\ 1;\ 0),\ g_3(2;\ 1;\ 1)\}$.

б) $f = \{f_1(0;\ 1;\ 2), f_2(1;\ 2;\ 1), f_3(0;\ 1;\ 1)\}$,
$g = \{g_1(3;\ 6;\ 3),\ g_2(4;\ 4;\ 0),\ g_3(1;\ 3;\ 2)\}$.

в) $f = \{f_1(1;\ 1;-1), f_2(0;\ 1;\ 1), f_3(0;\ 0;\ 1)\}$,
$g = \{g_1(-1;-1;\ 0),\ g_2(0;\ 3;\ 3),\ g_3(1;\ 2;\ 1)\}$.

г) $f = \{f_1(0;\ 0;\ 1), f_2(0;\ 1;-1), f_3(1;-1;\ 1)\}$,
$g = \{g_1(1;\ 0;\ 2),\ g_2(-1;\ 2;-4),\ g_3(2;-1;\ 5)\}$.

15. В пространстве R^3 в стандартном базисе e заданы другой базис f, набор g и вектор x. Для линейного оператора A выполняется $Af_k = g_k$. Найдите координаты вектора $y = Ax$ в базисе f.

а) $f = \{f_1(1;\ 0;\ 1), f_2(`1;-1;\ 0), f_3(1;\ 0;\ 0)\}$,

$g=\{g_1(3;\,0;\,3),\,g_2(1;\,1;\,0),\,g_3(2;\,1;\,1)\},\ x=(1;-1;\,2)$.

б) $f=\{f_1(0;\,1;\,2), f_2(1;\,2;\,1), f_3(0;\,1;\,1)\}$,
$g=\{g_1(3;\,6;\,3),\,g_2(0;\,1;\,1),\,g_3(1;\,3;\,2)\},\ x=(1;-1;\,2)$.

в) $f=\{f_1(1;\,1;-1), f_2(0;\,1;\,1), f_3(0;\,0;\,1)\}$,
$g=\{g_1(-1;-1;\,0),\,g_2(0;\,3;\,3),\,g_3(1;\,2;\,1)\},\ x=(1;\,3;\,2)$.

г) $f=\{f_1(0;\,0;\,1), f_2(0;\,1;-1), f_3(1;-1;\,1)\}$,
$g=\{g_1(1;\,0;\,2),\,g_2(-1;\,2;-4),\,g_3(2;-1;\,5)\},\ x=(1;-1;\,3)$.

16. В пространстве R^2 или R^3 в стандартном базисе e заданы другой базис f, набор g и многообразие H. Для линейного оператора A выполняется $Af_k=g_k$. Для многообразия $A(H)$ постройте СЛАУ в базисе f.

а) $f=\{f_1(1;-1), f_2(1;\,0)\},\ g=\{g_1(1;-3),\,g_2(1;\,1)\}$,
$H=c(4;\,5)+L\{a(2;\,1)\}$.

б) $f=\{f_1(1;-2), f_2(-1;\,3)\},\ g=\{g_1(2;-3),\,g_2(2;\,1)\},\ H:\begin{cases} x_1-3x_2=1\\ 2x_1+x_2=2\end{cases}$.

в) $f=\{f_1(1;-1;\,2), f_2(1;\,1;-3), f_3(-1;\,0;\,1)\}$,
$g=\{g_1(-4;\,2;\,4),\,g_2(5;-2;\,2),\,g_3(3;-1;\,1)\},\ H:\begin{cases} -x_1+5x_2+2x_3=3\\ 3x_1-2x_2-x_3=2\end{cases}$.

г) $f=\{f_1(3;\,2;\,3), f_2(1;\,1;\,1), f_3(1;\,1;\,2)\}$,
$g=\{g_1(11;\,8;\,12),\,g_2(-3;-1;-1),\,g_3(4;\,3;\,5)\}$,
$H=c(1;\,0;\,0)+L\{a_1(1;\,2;\,1),\,a_2(1;\,1;\,2)\}$.

д) $f=\{f_1(1;\,1;\,0), f_2(0;\,1;-1), f_3(0;\,1;\,0)\}$,
$g=\{g_1(3;\,3;\,0),\,g_2(0;\,1;\,1),\,g_3(1;\,2;\,1)\}$,
$H:\{\ 2x_1+7x_2+3x_3=7$.

Дополнительно.

е) $f=\left\{f_1(2;-1;\,3), f_2(2;2;1), f_3(1;-1;\,2)\right\}$,
$g=\left\{g_1(4;\,5;\,1),\,g_2(3;\,7;-1),\,g_3(2;-5;\,6)\right\}$,
$H:\{x_1-x_2-x_3=2$.

ж) $f=\left\{f_1(2;\,1;\,2), f_2(2;-1;1), f_3(1;\,2;\,2)\right\}$,
$g=\left\{g_1(3;-5;-1),\,g_2(6;\,4;\,7),\,g_3(9;-1;\,6)\right\}$,
$H:\{\ x_1-2x_2-x_3=-3$.

з) $f=\left\{f_1(1;-2;\,1), f_2(1;\,2;\,2), f_3(-1;\,1;-1)\right\}$,
$g=\left\{g_1(3;\,1;\,5),\,g_2(0;-4;-1),\,g_3(3;\,5;\,6)\right\}$,
$H:\{2x_1-2x_2+3x_3=1$.

и) $f=\left\{f_1(1;\,2;-1), f_2(0;\,1;\,1), f_3(-1;-1;\,1)\right\}$,
$g=\left\{g_1(2;\,9;\,2),\,g_2(-1;\,3;\,4),\,g_3(7;\,9;-8)\right\}$,

$H:\{4x_1+x_2+5x_3=5.$

к) $f=\{f_1(1;\,0;\,2), f_2(1;\,1;\,0), f_3(1;-1;\,3)\}$,

$g=\{g_1(3;\,4;\,0), g_2(4;-1;\,8), g_3(3;-4;\,11)\}$,

$H:\{\ 3x_1+x_2-x_3=8.$

17. Приведите пример матрицы линейного оператора A в стандартном базисе $e=\{e_1,e_2,...\}$ в R^n с заданными ядром и образом.

а) в R^3, $Ker(A)=L\{e_1\}$, $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1,e_2\}$.

б) в R^3, $Ker(A)=L\{e_1,e_3\}$, $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1+e_3\}$.

в) в R^3, $Ker(A)=L\{e_1+e_2\}$, $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1,e_3-e_2\}$.

г) в R^4, $Ker(A)=L\{e_1-e_2,e_3\}$, $\mathrm{Im}(A)=L\{e_1,e_4+e_3\}$.

18. Вычислите матрицу A^n.

а) $n=70,\ A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. б) $n=54,\ A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

19. В пространстве R^3 со стандартным базисом $e=\{e_1,e_2,e_3\}$ задан другой базис

$$f=\{f_1(-4;\,2;\,11), f_2(-7;-1;\,18), f_3(3;-1;\,8)\}.$$

Линейный оператор A задан условиями $A(e_k)=f_k$. Найдите матрицы A_e и A_f оператора A в базисах e и f.

20. В пространстве R^3 со стандартным базисом e задан базис $f=\{f_1,f_2,f_3\}$. Линейный оператор A задан условиями $A(e_j)=f_j$. Матрица оператора A в базисе f равна $A_f=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу A_e оператора A в базисе e.

21. Линейный оператор A в пространстве R^3 со стандартным базисом e имеет ядро $Ker(A)=L\{e_1\}$. Что можно сказать о ранге этого оператора?

22. В базисе $f=\{f_1(2;\,1;\,2), f_2(-2;\,2;\,1), f_3(1;\,2;-2)\}$матрица оператора A в R^3 симметричная, и, кроме того, $Af_1=2f_2$, $Af_3=-f_2+2f_3$. Приведите пример матрицы такого оператора в стандартном базисе $\{e_1,e_2,e_3\}$.

23. Приведите пример оператора поворота, переводящего прямую $L\{(4;\ 3)\}$в прямую $L\{(2;-1)\}$, задав его матрицу в стандартном базисе $\{e_1,e_2\}$.

24. Приведите пример оператора зеркальной симметрии, переводящего прямую $L\{(1;-4)\}$ в прямую $L\{(5;-3)\}$, задав его матрицу в стандартном базисе $\{e_1,e\}$.

25. Приведите пример оператора проектирования (не обязательно ортогонального), переводящего вектор $a(1;\ 3)$ в вектор $b(4;\ 2)$, указав его матрицу в стандартном базисе $\{e_1, e_2\}$.

26. Приведите пример матрицы такого оператора A в R^3, для которого

$$Ker(A) = L\{a(1;\ 1;\ 1)\},\ \mathrm{Im}(A) = L\{b_1(1; -2;\ 3),\ b_2(2;\ 1; -1)\}.$$

27. В пространстве E^3 заданы оператор S симметрии относительно плоскости, заданной уравнением $\pi : \{x_2 - x_2 - x_3 = 0$, и вектор $b = (-1;\ 3;\ 2)$. Чему равен вектор $S^{37}b$?

28. Для квадратных матриц n-го порядка докажите неравенство

$$rank(AB) \geq rank(A) + rank(B) - n.$$

Какую теорему следует использовать при доказательстве?

29. Скалярное произведение в R^3 задается положительно определенной билинейной формой с матрицей $B_e = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу оператора ортогонального проектирования на прямую $L = L\{a(1; -2;\ 3)\}$ в стандартном базисе e.

Ответы на типовые задачи

1. а) да. б) да. в) нет. г) нет.
   д) нет. е) да. ж) да. з) да.
   и) да. к) нет. л) нет. м) нет.
   н) нет. о) да. п) нет. р) да.
   с) да. т) нет. у) да. ф) да.
   х) нет. ц) нет. ч) да. ш) нет.
   щ) да. э) нет. ю) да. я) да.
2. а) нет. б) нет. в) да. г) да.
   д) да. е) да. ж) да. з) да.
3. а) $y = (23;\ 24)$. б) $y = (29;\ 1)$.
   в) $y = (9;\ 1;\ 2)$. г) $y = (7; -9;\ 11)$.
4. а) $A_f = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. б) $A_f = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -4 \\ 8 & 16 & -7 \\ 6 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

   в) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -8 \\ -4 & 8 & 10 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

г) $A_f=\begin{pmatrix}-3 & 3 & -6\\ -7 & 9 & -15\\ 4 & -6 & 9\end{pmatrix}$. д) $A_f=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2\\ -1 & 9 & -8\\ 2 & -9 & 7\end{pmatrix}$.

5. а) $A_f=\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 7 & 3\end{pmatrix}$. б) $A_f=\begin{pmatrix}9 & -10\\ 5 & -8\end{pmatrix}$.

в) $A_f=\begin{pmatrix}-4 & 16 & -13\\ -2 & 6 & -4\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$. г) $A_f=\begin{pmatrix}-6 & 2 & -7\\ 14 & -1 & 12\\ 11 & -3 & 12\end{pmatrix}$.

6. а) $D_f=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & -3 & 2\\ -1 & -3 & 2\end{pmatrix}$. б) $D_f=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6 & 6 & -2\\ -1 & 2 & 0\\ 11 & -10 & 4\end{pmatrix}$.

в) $D_f=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-4 & -12 & -7\\ 4 & 6 & 4\\ -4 & -2 & -2\end{pmatrix}$.

7. а) $F_{ee}=(1\ \ 0\ \ 0)$, $KerF=L\{e_2,e_3\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

б) $F_e=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $KerF=L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

в) $F_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $KerF=L\{e_{12},e_{21}\}$, $\operatorname{Im}F=L\{e_{11},e_{22}\}$.

г) $F_{ee}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $KerF=L\{e_{12},e_{22}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

д) $F_{ee}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $KerF=L\{e_{12},e_{21},e_{22}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

е) $F_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $KerF=L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

ж) $F_f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $KerF=\{0\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

з) $F_{ee}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$, $KerF=L\{1\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

и) $F_{ee}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $KerF=\{0\}$, $ImF=L\left\{1,x^2\right\}$.

к) $F_e=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $KerF=L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

л) $F_e=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $KerF=L\{1\}$, $\operatorname{Im}F=L\{1,x,x^2\}$.

м) $F_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $KerF=L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

н) $F_e=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&12\end{pmatrix}$, $KerF=L\left\{1\right\}$, $ImF=L\left\{1,x^2\right\}$.

о) $F_e=E=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, $KerF=L\left\{1,x\right\}$, $ImF=L\left\{x\right\}$.

п) $F_e=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $KerF=L\left\{1,x\right\}$, $ImF=L\left\{x\right\}$.

р) $F_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $KerF=L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im}F=L_2$.

с) $F_{gf}=\begin{pmatrix}1/2&1/4\\1/2&-1/4\\0&1/2\end{pmatrix}$, $KerF=\{0\}$,

$\operatorname{Im}F=L\{x,x^2\}=L\{g_1+g_2,g_1+g_3\}$.

т) $F_f = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 \\ -3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $KerF = L\{\overline{0}\}$, $\operatorname{Im} F = L_2$.

у) $F_{ee} = (2 \;\; 0 \;\; 2/3 \;\; 0)$, $KerF = L\{x, x^3\}$, $\operatorname{Im} F = L_2$.

ф) $F_f = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $KerF = L\{f_1 - f_2\}$,

$\operatorname{Im} F = L\{x, x^2\} = L\{f_1 + f_2, f_1 + f_3\}$.

х) $F_f = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $KerF = L\{f_1 - f_2\}$,

$\operatorname{Im} F = L\{x, x^2\} = L\{f_1 + f_2, f_1 + f_3\}$.

8. а) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. г) $A_e = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. а) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. г) $A_e = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

10. а) $P_e = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. б) $P_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

в) $P_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. г) $P_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

д) $P_e = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. е) $P_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) $P_e = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
з) $P_e = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

и) $P_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. а) $S_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
б) $S_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

в) $S_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.
г) $S_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

д) $S_e = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
е) $S_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ж) $S_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.
з) $S_e = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

и) $S_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. а) $A(L): \{x_1 + 2x_2 = 0$, $\dim(L) = 1$.

б) $A(L): \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, $\dim(L) = 1$.

в) $A(L): \{5x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 0$, $\dim(L) = 2$.

г) $A(L): \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 0 \end{cases}$, $\dim(L) = 1$.

13. а) $A(H): \{13x_1 + 4x_2 = 10$, $\dim(A(H)) = 1$.

б) $A(H):\begin{cases} x_1-4x_2=-3 \\ 5x_2+x_3=\ \ 3 \end{cases}, \dim\big(A(H)\big)=1.$

в) $A(H):\{-3x_1+5x_2+3x_3=0, \dim\big(A(H)\big)=2.$

г) $A(H):\begin{cases} x_1-3x_3=4 \\ x_2-2x_3=2 \end{cases}, \dim\big(A(H)\big)=1.$

14. а) $A_e=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

б) $A_e=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

в) $A_e=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

г) $A_e=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

15. а) $y_f=(4;\ 1;-2).$ б) $y_f=(0;\ 5;-6).$

в) $y_f=(0;\ 7;\ 0).$ г) $y_f=(8;\ 3;\ 4).$

16. а) $A(H):\{4y_1+3y_2=-12.$ б) $A(H):\begin{cases} y_1=23 \\ y_2=13 \end{cases}.$

в) $A(H):\begin{cases} y_1-2y_2=30 \\ 2y_2+\ y_3=26 \end{cases}.$ г) $A(H):\{y_1+16y_2-7y_2=18.$

д) $A(H):\begin{cases} 3y_1-4y_2=7 \\ 2y_2+\ y_3=0 \end{cases}.$ е) $A(H):\{2y_1-4y_2-3y_2=38.$

ж) $A(H):\begin{cases} 4y_1+7y_2 \qquad\quad =3 \\ 3y_1-4y_2+7y_3=6 \end{cases}.$ з) $A(H):\{-11y_1-5y_2+8y_2=0.$

и) $A(H):\begin{cases} -2y_1+\ y_3=\ \ \ 8 \\ \qquad y_2+4y_3=-49 \end{cases}.$ к) $A(H):\{y_1-21y_2-17y_2=136.$

17. а) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

в) Например, $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

г) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. а) $A^{70} = 2^{69} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. б) $A^{54} = -2^{27} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы на дополнительные задачи

22. $r(A) = 2$.

26. Указание. Для столбцов матрицы выполняются условия

$A^k = \lambda_k b_1 + \mu_k b_2$, $A^1 + A^2 + A^3 = 0$, откуда $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0 \end{cases}$.

27. $S^{37} b = (3; -1; -2)$.

XVII. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

Определения и формулы

Для линейного оператора A в линейном пространстве V линейное подпространство $L \subseteq V$ называется инвариантным подпространством, если для любого $x \in L$ выполняется условие $Ax \in L$.

Пересечение и сумма любого числа инвариантных подпространств являются являются инвариантными подпространствами оператора A.

Ядро $Ker(A)$ и образ $\mathrm{Im}(A)$ являются инвариантными подпространствами оператора A.

Ограничением линейного оператора A на инвариантное подпространство L называется оператор $A|_L : L \to L$, действующий по формуле $A|_L(x) = A(x)$ для всех $x \in L$.

Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора A в пространстве V, если $Ax = \lambda x$ для некоторого числа $\lambda \in R$. Число λ называется собственным значением оператора A.

Линейное подпространство $L_\lambda \subseteq V$ линейного пространства V называется собственным подпространством линейного оператора A, отвечающим собственному значению λ, если оно состоит из всех векторов $x \in V$, для которых выполняется условие $Ax = x$. Собственное подпространство состоит из всех собственных векторов с данным собственным значением, к которым добавлен нулевой вектор. Подпространство L_λ инвариантно относительно действия оператора A.

Любой ненулевой вектор $x \in Ker(A)$ является собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda = 0$. Ядро оператора является собственным подпространством, отвечающим собственному значению нуль.

Вектор x является собственным с собственным значением λ тогда и только тогда, когда $x \in Ker(A - \lambda E)$.

Многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом матрицы A.

Характеристические многочлены матриц оператора A во всех базисах совпадают.

Характеристический многочлен матрицы оператора A в любом базисе f называется характеристическим многочленом $\chi(\lambda)$ оператора A, а уравнение $\chi(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением для оператора A.

Число α является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического уравнения $\chi(\lambda)=0$. Каждому корню характеристического уравнения соответствует хотя бы один собственный вектор.

Количество различных собственных значений линейного оператора в конечномерном линейном пространстве V конечно и не превосходит числа $n=\dim(V)$.

Следом матрицы A (обозначение trA) называется сумма элементов на главной диагонали матрицы: $trA=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$. Для квадратной матрицы порядка три ее характеристический многочлен может быть записан в виде

$$\chi(\lambda)=-\lambda^3+trA\lambda^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda+\det A,$$

где величины A_{kk} – алгебраические дополнения диагональных элементов a_{kk}.

Любой конечный набор собственных векторов оператора A с попарно различными собственными значениями линейно независим.

Базис из собственных векторов оператора A в пространстве V существует тогда и только тогда, когда существует разложение пространства V в прямую сумму подпространств вида L_α.

Алгебраической кратностью собственного значения α называется кратность k_α корня α в разложении характеристического многочлена. Геометрической кратностью собственного значения α называется число $m_\alpha=\dim(L_\alpha)$.

Для геометрической кратности верно ограничение $1\le m_\alpha\le k_\alpha$.

Базис из собственных векторов у оператора A в пространстве V существует тогда и только тогда, когда все корни характеристического многочлена действительные, и при этом для каждого корня α его геометрическая кратность равна алгебраической кратности.

Если число различных корней характеристического уравнения в точности равно n, то такой оператор имеет базис из собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора A с матрицей A_e в стандартном базисе e.

а) $A_e=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ -15 & 7\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. а) Составим характеристическое уравнение для матрицы A_e и решим его:

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-4-\lambda & 2\\ -15 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+4)(\lambda-7)+30=\lambda^2-3\lambda+2=0.$$

Получим $\lambda_1=1, \lambda_2=2$. Для собственного значения $\lambda_1=1$ собственный вектор удовлетворяет матричному уравнению $\begin{pmatrix}-5 & 2\\ -15 & 6\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}$. Решением является вектор $f_1=(2;5)$. Для собственного значения $\lambda_2=2$ матричное уравнение имеет вид $\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -15 & 5\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}$. Здесь решением является вектор $f_2=(1;3)$.

б) Составим и решим характеристическое уравнение для матрицы A_e. Вычисления дают:

$$trA=6, W=A_{11}+A_{22}+A_{33}=7+2+2=11, \det A=6.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\chi(\lambda)=-\lambda^3+trA\lambda^2-W\lambda+\det A=-\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0.$$

Подстановкой убеждаемся, что число $\lambda_1=1$ является корнем. Разделив уголком многочлен $\chi(\lambda)$ на $(\lambda-1)$, получим многочлен $-\lambda^2+5\lambda-6$, корнями которого являются собственные значения $\lambda_2=2$ и $\lambda_3=3$. Три собственных вектора являются решениями трех матричных уравнений:

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & -2\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}, \begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}, \begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}.$$

Решив эти СЛАУ, получим:

$f_1=(1;-1;0)$ для $\lambda_1=1$;

$f_2=(0;1;-1)$ для $\lambda_2=2$;

$f_3=(-1;1;1)$ для $\lambda_3=3$.

Пример 2. Матрица линейного оператора в базисе $e=\{e_1,e_2\}$ имеет вид A_e. Существует ли базис, в котором матрица имеет вид A_f? Если существует, то найдите матрицу перехода хотя бы к одному такому базису.

а) $A_e=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix}-8 & 14\\ -7 & 13\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}, A_f=\begin{pmatrix}17 & 8\\ -24 & -11\end{pmatrix}$.

Решение. а) Характеристические многочлены для матриц A_e и A_f совпадают:

$$\chi_1(\lambda)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix}=\chi_2(\lambda)=\begin{vmatrix} -8-\lambda & 14 \\ -7 & 13-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6.$$

Собственные значения обеих матриц $\lambda_1=6$ и $\lambda_2=-1$. Для оператора с матрицей A_e собственные векторы с координатами в базисе e находятся из уравнений:

(1) $\lambda_1=6, (A-6E)\cdot g_1=\bar{0}$ или $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\cdot g_1=\bar{0}$, $g_1=(3;\ 1)$.

(2) $\lambda_2=-1, (A+E)\cdot g_2=\bar{0}$ или $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot g_2=\bar{0}$, $g_2=(1;\ -2)$.

Следовательно, базис $g=\{g_1,g_2\}$ из собственных векторов существует. В этом базисе матрица оператора и матрица перехода

$$A_g=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to g}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для оператора с матрицей A_f собственные векторы с координатами в базисе f находятся из уравнений:

(1) $\lambda_1=6, (A-6E)\cdot h_1=\bar{0}$ или $\begin{pmatrix} -14 & 14 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}\cdot h_1=\bar{0}$, $h_1=(1;\ 1)$.

(2) $\lambda_2=-1, (A+E)\cdot h_2=\bar{0}$ или $\begin{pmatrix} -7 & 14 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}\cdot h_2=\bar{0}$, $h_2=(2;\ 1)$.

Базис $h=\{h_1,h_2\}$ из собственных векторов также существует. В этом базисе матрица оператора и матрица перехода

$$A_h=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{f\to h}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что базисы g и h совпадают. Тогда корректно предположение, что A_e, A_f и A_g – матрицы одного и того же оператора в базисах e, f и g. При таком предположении

$$T_{e\to f}=T_{e\to g}T_{g\to f}=T_{e\to g}T_{f\to g}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

б) Характеристический многочлен для матрицы A_e имеет вид $\chi(\lambda)=\lambda^2+5\lambda-6$, а характеристический многочлен для матрицы A_f имеет вид $\chi(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+5$. Между тем для всех матриц одного оператора в разных базисах характеристический многочлен должен быть одинаковым. Значит, искомого базиса не существует.

Пример 3. Вычислите A^{100}, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5$, его корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$. Оператор с матрицей A_e имеет базис $f = \{f_1(-1;\ 1), f_2(1;\ 3)\}$ из собственных векторов. В этом базисе матрица оператора равна $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Матрицы перехода

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, T_{f\to e} = (T_{e\to f})^{-1} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $A_e^k = (T_{e\to f}\cdot A_f \cdot T_{f\to e})^k = T_{e\to f}\cdot A_f^k \cdot T_{f\to e}$. Тогда

$$A_e^{100} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^{100} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 3+5^{100} & -1+5^{100} \\ -3+3\cdot 5^{100} & 1+3\cdot 5^{100} \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Найдите собственные значения и собственные векторы для линейного оператора A с матрицей A_e. Существует ли базис из собственных векторов для данного оператора? Если есть, то напишите матрицу перехода к базису из собственных векторов.

а) $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Выпишем характеристическое уравнение для оператора A:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)((\lambda-3)^2-1) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_2 = 4$ (все кратности один). Согласно теории, три собственных вектора $\{f_1, f_2, f_3\}$, соответствующие этим собственным значениям, образуют базис f. Остается найти их. Для этого следует решить три матричных уравнения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot X = \bar{0}, \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X = \bar{0}, \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot X = \bar{0}.$$

В итоге $f_1=(6;\ 1;\ 1)$, $f_2=(0;-1;\ 1)$, $f_3=(0;\ 1;\ 1)$. Матрица перехода к этому базису и матрица оператора в базисе f:

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix}6&0&0\\1&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ A_f=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

б) Характеристическое уравнение для оператора A:

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&-2\\-2&1-\lambda&0\\-1&0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0.$$

Его корни: $\lambda_1=-2$ кратности один и $\lambda_2=1$ кратности два. Для нахождения собственных векторов надо решить две СЛАУ:

$$(A+2E)\cdot X=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-2&3&0\\-1&0&3\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0},$$

$$(A-E)\cdot X=\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-2&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot X=\overline{0}.$$

Решением первой системы будет вектор $f_1=(3;\ 2;\ 1)$. Вторая система имеет ранг два, поэтому получаем еще только один собственный вектор $f_2=(0;\ 2;\ 1)$. Геометрическая кратность для корня $\lambda_1=1$ равна единице и меньше его алгебраической кратности. Согласно критерию, базиса из собственных векторов у данного оператора не существует.

Пример 5. Пусть линейный оператор A задан матрицей A_e, содержащей параметр p. Найдите значение параметра p, при котором у оператора есть базис из собственных векторов, и для каждого найденного p определите этот базис.

а) $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&p&2\end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix}2&p+1&0\\0&p&0\\2&1-p&p\end{pmatrix}$.

Решение. а) Характеристическое уравнение оператора A

$$\chi(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&3-\lambda&0\\1&p&2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)(\lambda-3)^2=0.$$

Базис из собственных векторов существует тогда и только тогда, когда геометрическая кратность, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 3$, равна 2. Это эквивалентно требованию

$$rank(A_e - 3E) = rank\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & p & -1 \end{pmatrix} = 1,$$

что достигается при $p = -1$.

Итак, базис из собственных векторов существует только при $p = -1$. Два собственных вектора, соответствующих собственному значению $\lambda_1 = 3$, являются решениями уравнения $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Положим

$$f_1 = (1;\ 1;\ 0),\ f_2 = (1;\ 0;\ 1).$$

Третий вектор соответствует собственному значению $\lambda_2 = 1$. Он является решением СЛАУ

$$(A - E)\cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot X = \overline{0}, \text{ откуда } f_3 = (1;\ 0;\ -1).$$

б) Характеристическое уравнение оператора A

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & p+1 & 0 \\ 0 & p-\lambda & 0 \\ 2 & 1-p & p-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(p-\lambda)^2 = 0.$$

Базис из собственных векторов существует тогда и только тогда, когда геометрическая кратность собственного значения $\lambda = p$ равна его алгебраической кратности.

(1) При $p = 2$ алгебраическая кратность корня $\lambda = p$ равна трем. Значит, должен быть базис из трех собственных векторов с собственным значением $\lambda = 2$, что означает, что $A = 2E$. Поскольку это не так, вариант $p = 2$ нас не устраивает.

(2) Если $p \neq 2$, то геометрическая кратность собственного значения $\lambda = p$ должна быть равна двум. Это означает, что

$$rank(A - p\cdot E) = rank\begin{pmatrix} 2-p & p+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1-p & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Данное условие эквивалентно уравнению

$$\begin{vmatrix} 2-p & p+1 \\ 2 & 1-2p \end{vmatrix} = (2-p)(1-p)-2(p+1) = p^2-5p = 0,$$

откуда $p=0$ или $p=5$. Следовательно, базис из собственных векторов существует при $p=0$ или $p=5$. Для нахождения базисов рассмотрим оба варианта.

(3) Если $p=0$, то для $\lambda_1 = p = 0$ собственные векторы являются решением уравнения $2x_1 + x_2 = 0$, откуда $f_1 = (1; -2; 0)$, $f_2 = (0; 0; 1)$. Третий вектор соответствует собственному значению $\lambda_2 = 2$ и является решением СЛАУ

$$(A-2E)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}, \text{ откуда } f_3 = (1; 0; 1).$$

(4) Если $p=5$, то для $\lambda = p = 5$ собственные векторы являются решением уравнения $-x_1 + 2x_2 = 0$, откуда $f_1 = (2; 1; 0)$, $f_2 = (0; 0; 1)$. Для $\lambda_2 = 2$ надо решить СЛАУ

$$(A-2E)\cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}, \text{ откуда } f_3 = (3;\ 0;\ -1).$$

Пример 6. В пространстве многочленов оператор A задан формулой

$$A[p(x)] = \int_1^{2x} (t\cdot p(t))''\,dt.$$

Докажите, что это линейный оператор, который переводит подпространство $P_2[x]$ многочленов степени не выше двух в себя. Найдите собственные значения и собственные векторы оператора A в этом подпространстве (собственные векторы запишите в виде многочленов).

Решение. Проверим линейность оператора в пространстве всех многочленов:

$$A[f(x)+g(x)] = \int_1^{2x} (t\cdot(f(t)+g(t)))''\,dt = \int_1^{2x} (t\cdot f(t))''\,dt +$$

$$+\int_1^{2x} (t\cdot g(x))''\,dt = A[f(x)] + A[g(x)],$$

$$A[a\cdot f(x)] = \int_1^{2x} (t\cdot(a\cdot f(t)))''\,dt = a\cdot\int_1^{2x} (t\cdot f(t))''\,dt = a\cdot A[f(x)].$$

Теперь докажем, что подпространство $P_2[x]$ переходит в себя. В пространстве $P_2[x]$ возьмем стандартный базис $f=\{1,x,x^2\}$. Для векторов базиса

$$A(f_1)=\int_1^{2x}(t\cdot 1)''dt=0,$$
$$A(f_2)=\int_1^{2x}(t\cdot t)''dt=\int_1^{2x}2dt=4x-2,$$
$$A(f_3)=\int_1^{2x}(t\cdot t^2)''dt=\int_1^{2x}6t\cdot dt=3t^2\Big|_1^{2x}=12x^2-3.$$

Так как образ каждого вектора базиса является многочленом степени не выше двух, оператор A переводит пространство $P_2[x]$ в себя.

В базисе f матрица оператора A имеет вид

$$A_f=\begin{pmatrix}0&-2&-3\\0&4&0\\0&0&12\end{pmatrix}.$$

Ее характеристическое уравнение считается по формуле

$$\chi(\lambda)=-\lambda^3+trA\lambda^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})\lambda+detA=-\lambda^3+16\lambda^2-48\lambda=0.$$

Собственные значения $\lambda_1=0, \lambda_2=4$ и $\lambda_3=12$. Вычислим собственные векторы (в координатах в базисе $f=\{1,x,x^2\}$):

$$g_1(x)=(1;\ 0;\ 0),\ g_2(x)=(-1;\ 2;\ 0),\ g_3(x)=(-1;\ 0;\ 4).$$

Ответ следует выписать без привязки к базису в многочленах:

$$g_1(x)=f_1(x)=1,\ g_2(x)=2f_2(x)-f_1(x)=2x-1,$$
$$g_3(x)=4f_3(x)-f_1(x)=4x^2-1.$$

Типовые задачи

1. Найдите действительные собственные значения и действительные собственные векторы оператора с матрицей A_e.

а) $A_e=\begin{pmatrix}5&1\\-2&2\end{pmatrix}$.

б) $A_e=\begin{pmatrix}2&4\\5&3\end{pmatrix}$.

в) $A_e=\begin{pmatrix}1&-5\\3&-4\end{pmatrix}$.

г) $A_e=\begin{pmatrix}1&-8&4\\-2&-8&5\\-4&-14&9\end{pmatrix}$.

д) $A_e = \begin{pmatrix} -24 & -7 & -19 \\ 32 & 9 & 26 \\ 18 & 6 & 13 \end{pmatrix}$. е) $A_e = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

ж) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. з) $A_e = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

и) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. к) $A_e = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -5 \\ -9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

л) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. м) $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 12 \\ -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

2. В пространстве $P_2[x]$ многочленов степени не выше двух действует оператор φ. Докажите, что это линейный оператор, найдите его собственные значения и собственные векторы.

а) $\phi(p(x)) = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_0^x (6t+1) \cdot p'(t) \cdot dt$.

б) $\phi(p(x)) = (\ (x+1) \cdot p(x)\ )' + p(x)$.

в) $\phi(p(x)) = \frac{1}{x} \cdot \int\limits_2^{x+2} 2t \cdot p'(t) \cdot dt$.

г) $\phi(p(x)) = \int\limits_1^{2x} (t \cdot p(t))'' dt$.

3. Линейный оператор A имеет характеристический многочлен $\chi(\lambda)$. Укажите характеристический многочлен $\chi_1(\lambda)$ оператора B, зависящего от A и A^{-1}.

а) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, $B = -3A$.

б) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, $B = A - 3E$.

в) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, $B = A^{-1}$.

г) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$, $B = A^2 + 4A + 3E$.

д) $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 5$, $B = A^2$.

е) $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda + 20$, $B = A^2$.

Дополнительно.

ж) $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6$, $B = A^2 + 4A + E + 6A^{-1}$.

з) $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$, $B = A^3$.

4. Из трех матриц A, B и C выберите две, которые могут быть матрицами D_e и D_g для одного и того же оператора D в двух базисах e и g. Для этой пары укажите матрицу перехода $T_{e\to g}$.

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

г) $A=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

д) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -13 & 4 \end{pmatrix}$.

е) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$.

ж) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$.

з) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите A^n.

а) $n=99$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

б) $n=41$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

в) $n=100$, $A=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

г) $n=100$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

д) $n=44$, $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

е) $n=37$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

ж) $n=46$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

з) $n=51$, $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Существует ли базис f из собственных векторов для оператора с матрицей A_e? Если существует, то укажите матрицу A_f оператора A в базисе f и матрицу перехода к базису f.

а) $A_e=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-1&3&1\\-1&1&3\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}5&-2&2\\15&-8&10\\9&-6&8\end{pmatrix}$. в) $A_e=\begin{pmatrix}-2&1&-2\\-2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A в R^3 задан матрицей A_e, содержащей параметр p. Найдите значение параметра p, при котором у оператора A есть базис f из собственных векторов. Для каждого найденного p укажите базис f.

а) $A_e=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&p&1\\0&0&P\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&0\\1&p&2\end{pmatrix}$. в) $A_e=\begin{pmatrix}3&p+1&0\\0&1&0\\4&p+7&1\end{pmatrix}$.

г) $A_e=\begin{pmatrix}1&0&0\\p+2&0&1\\-P^2&1&0\end{pmatrix}$. д) $A_e=\begin{pmatrix}2&p+1&0\\0&p&0\\2&1-p&p\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

е) $A_e=\begin{pmatrix}2&-1+p&-1+p\\1-p&2p&-1+p\\-1+p&1-p&2\end{pmatrix}$. ж) $A_e=\begin{pmatrix}4-p&3-p&0\\0&p&0\\p-1&1&2+p\end{pmatrix}$.

з) $A_e=\begin{pmatrix}3&p+1&0\\0&1&0\\4&p+7&1\end{pmatrix}$. и) $A_e=\begin{pmatrix}p&p&0\\0&2-p&0\\2p-4&1&4-p\end{pmatrix}$.

к) $A_e=\begin{pmatrix}p&-1+p&0\\0&4-\text{р}&0\\3-p&1&6-p\end{pmatrix}$. л) $A_e=\begin{pmatrix}p-2&-p+1&p\\p&-p-1&p\\-p+2&p-2&-p\end{pmatrix}$.

8. Пусть линейный оператор A в R^3 задан матрицей A_e, содержащей параметр P. Найдите значение параметра, при котором у оператора A нет базиса из собственных векторов.

а) $A_e=\begin{pmatrix}2P&-3&0\\3&0&0\\-3&1&P-4\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}2P&-4&0\\4&0&0\\1&2&P-3\end{pmatrix}$.

9. Найдите все (включая комплексные) собственные значения и собственные векторы оператора с матрицей A_e.

а) $A_e=\begin{pmatrix}0&-1&0\\3&0&-2\\-5&3&5\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}-4&2&5\\5&-1&-5\\-9&4&10\end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

10. Число $\lambda \neq 0$ является собственным значением линейного оператора A (то есть существует x такое, что $Ax = \lambda \cdot x$). Укажите собственные значения, которые наверняка есть у нижеуказанных операторов:

а) A^{-1}; б) A^{T}; в) A^{2};

г) $P(A)$ для многочлена $P(t)$; д) $A^{3} + A^{-2} + 2E$.

11. Пусть для матрицы A вектор x – собственный с собственным значением $\lambda \neq 0$. Для каких нижеуказанных матриц он обязательно будет собственным вектором?

а) A^{-1}; б) A^{T}; в) A^{2}; г) $A^{2} + A^{3}$; д) $A + A^{-1} + E$.

12. Приведите (с обоснованием) примеры линейных операторов в R^{2}:

а) имеющих собственные векторы и базис из собственных векторов;

б) имеющих собственные векторы, но не имеющих базиса из собственных векторов;

в) не имеющих собственных векторов.

13. Пусть x и y – собственные векторы линейного оператора A с разными собственными значениями λ и μ. Какие линейные комбинации $z = \alpha x + \beta y$ образуют собственный вектор? Какое при этом получается собственное значение?

14. Докажите, что если для линейного оператора A собственные значения для собственных векторов x и y различные, то вектор $\alpha x + \beta y$ при $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ не является собственным.

15. Докажите, что если для линейного оператора A, действующего в пространстве R^{n}, все ненулевые векторы собственные, то A – скалярный оператор, то есть $\exists\, \lambda_0 \in R$ такое, что $A = \lambda_0 E$, где E – единичный оператор.

16. Вычислите e^{A}, где $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. Найдите $B = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n}$, где $A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Найдите $Y = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n}(X)$, где $A = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/7 \\ 4/5 & 1/7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

19. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} A^{n}(f)$.

а) $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$.

20. Пусть вектор x – собственный с собственным значением λ для оператора A. Существует ли собственный вектор с собственным значением λ у оператора $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$? Если существует, то найдите этот вектор.

21. Характеристический многочлен оператора A в R^2 равен $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$.

а) Найдите характеристический многочлен $\chi_1(\lambda)$ оператора A^{-1}.

б) Найдите характеристический многочлен $\chi_2(\lambda)$ оператора

$$B = P(A) = A^2 + 3A + 2E.$$

в) Определите $\dim(Ker(B))$ и $\dim(\mathrm{Im}(B))$.

22. Докажите с помощью рассмотрения задачи на условный экстремум, что симметрическая матрица с действительными элементами имеет действительное собственное значение.

Ответы на типовые задачи

1. а) $\lambda_1 = 3,\ f_1 = (1;\ -2);\quad \lambda_2 = 4,\ f_2 = (1;\ -1).$

б) $\lambda_1 = -2,\ f_1 = (1;\ -1);\quad \lambda_2 = 7,\ f_2 = (4;5).$

в) Отсутствуют.

г) $\lambda_1 = 1,\ f_1 = (1;\ 2;\ 4);\quad \lambda_2 = -1,\ f_2 = (2;\ 3;\ 5);$
$\lambda_3 = 2,\ f_3 = (0;\ 1;\ 2).$

д) $\lambda_1 = 1,\ f_1 = (-5;\ 7;\ 4);\quad \lambda_2 = -1,\ f_2 = (-4;\ 5;\ 3);$
$\lambda_3 = -2,\ f_3 = (-3;\ 4;\ 2).$

е) $\lambda_{1,2} = 1,\ f_1 = (1;\ 0;\ 2),\ f_2 = (2;\ 2;\ -1);$
$\lambda_3 = 2,\ f_3 = (2;\ 1;\ 2).$

ж) $\lambda_1 = -1,\ f_1 = (1;\ 1);\quad \lambda_2 = -2,\ f_2 = (2;\ 3).$

з) $\lambda_1 = 4,\ f_1 = (2;\ -3);\quad \lambda_2 = 9,\ f_2 = (1;\ 1).$

и) $\lambda_1 = 1,\ f_1 = (1;\ -1;\ 2).$

к) $\lambda_1 = 1,\ f_1 = (1;\ 0;\ 1).$

л) $\lambda_{1,2} = 2,\ f_1 = (1;\ 1;\ 0),\ f_2 = (0;\ 2;\ 1);$
$\lambda_3 = 1,\ f_3 = (1;\ 2;\ 1).$

м) $\lambda_1 = 1,\ f_1 = (-3;\ 2;\ 2);\quad \lambda_2 = -1,\ f_2 = (-3;\ 1;\ 2);$
$\lambda_3 = 2,\ f_3 = (-2;\ 1;\ 1).$

2. а) $\lambda_1 = 0,\ p_1(x) = 1;\quad \lambda_2 = 3,\ p_2(x) = 3x + 1;$
$\lambda_3 = 4,\ p_3(x) = 4x^2 + 4x + 1.$

б) $\lambda_1 = 2,\ p_1(x) = 1;\quad \lambda_2 = 3,\ p_2(x) = x + 1;$
$\lambda_3 = 4,\ p_3(x) = x^2 + 2x + 1.$

в) $\lambda_1=0,\ p_1(x)=1;\quad \lambda_2=\dfrac{3}{2},\ p_2(x)=3x+4;$

$\lambda_3=2,\ p_3(x)=x^2+24x+36.$

г) $\lambda_1=0,\ p_1(x)=1;\quad \lambda_2=4,\ p_2(x)=2x-1;$

$\lambda_3=12,\ p_3(x)=4x^2-1.$

3. а) $\chi_1(\lambda)=(\lambda+3)(\lambda-6).$ б) $\chi_1(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda+5).$

в) $\chi_1(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2}).$ г) $\chi_1(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda+1).$

д) $\chi(\lambda)=-\lambda^3-5\lambda^2-19\lambda+25.$ е) $\chi(\lambda)=-\lambda^3-12\lambda^2-36\lambda+400.$

ж) $\chi_1(\lambda)=-(\lambda+8)(\lambda-16)(\lambda+4).$ з) $\chi(\lambda)=(1-\lambda)\left(\lambda^2+22\lambda+125\right).$

4. а) $B=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-2\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}1&3\\-3&-1\end{pmatrix}.$

б) $A=D_e,\ B=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}4&3\\-1&0\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}3&4\\0&-1\end{pmatrix}.$

в) $B=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$

г) $A=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}-14&19\\11&-15\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}-16&21\\13&-17\end{pmatrix}.$

д) $A=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}4&0\\-3&1\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}3&-1\\1&0\end{pmatrix}.$

е) $B=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}10&7\\13&9\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}-11&8\\-15&11\end{pmatrix}.$

ж) $A=D_e,\ B=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}5&3\\-3&2\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}17&11\\-7&4\end{pmatrix}.$

з) $A=D_e,\ C=D_g,\ T_{e\to g}=\begin{pmatrix}-6&1\\5&9\end{pmatrix}$ или $T_{e\to g}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}.$

5. а) $A^{99}=2^{98}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\5&-3\end{pmatrix}.$

б) $A^{41}=2^{40}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\1&-1\end{pmatrix}.$

в) $A^{100}=2^{99}\cdot\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}.$

г) $A^{100}=\dfrac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}3+5^{100}&-1+5^{100}\\-3+3\cdot5^{100}&1+3\cdot5^{100}\end{pmatrix}.$

д) $A^{44}=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}3+4\cdot 6^{44} & 4-4\cdot 6^{44}\\ 3-3\cdot 6^{44} & 4+3\cdot 6^{44}\end{pmatrix}$.

е) $A^{37}=2^{36}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}$.

ж) $A^{46}=-4^{45}\cdot\begin{pmatrix}5 & 7\\ -3 & -1\end{pmatrix}$.

з) $A^{51}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2^{51}+4\cdot 3^{51} & 4\cdot 2^{51}-4\cdot 3^{51}\\ -3\cdot 2^{51}+3\cdot 3^{51} & 4\cdot 2^{51}-3\cdot 3^{51}\end{pmatrix}$.

6. а) $A_f=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}, T_{e\to f}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

б) $A_f=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}, T_{e\to f}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 5 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

в) Для $\lambda_1=1$ АК = 2, ГК = 1, следовательно, базиса не существует.

7. а) $p=1$, базис $f=\{f_1(1;1;0), f_2(0;1;0), f_3(1;0;-1)\}$.

б) $p=-1$, базис $f=\{f_1(1;1;0), f_2(1;0;1), f_3(1;0;-1)\}$.

в) $p=5$, базис $f=\{f_1(3;-1;0), f_2(0;0;1), f_3(1;0;2)\}$.

г) $p=-1$ или $p=2$;

при $p=-1$ базис $f=\{f_1(0;1;-1), f_2(1;1;0), f_3(0;1;1)\}$;

при $p=2$ базис $f=\{f_1(0;1;-1), f_2(1;4;0), f_3(0;1;-1)\}$.

д) $p=0$ или $P=5$;

при $p=0$ базис $f=\{f_1(1;-2;0), f_2(0;0;1), f_3(1;0;1)\}$;

при $p=5$ базис $f=\{f_1(2;1;0), f_2(0;0;1), f_3(3;0;-1)\}$.

е) $p\in R$; при $p=1$ годится любой базис;

при $p\neq 1$ базис $f=\{f_1(1;1;-1), f_2(1;1;0), f_3(1;0;1)\}$.

ж) $p\neq 2$; для $\lambda_1=4-p$, $f_1(2;\ 0;-1)$;

для $\lambda_2=p$, $f_2(6-2p;\ \ 4p-8;\ \ p^2-6p+7)$;

для $\lambda_3=2+p$, $f_3(0;\ 0;\ 1)$.

з) $p=5$, базис $f=\{f_1(3;-1;0), f_2(0;0;1), f_3(1;0;2)\}$.

и) $p\neq 1$; для $\lambda_1=p$, $f_1(1;\ 0;\ 1)$;

для $\lambda_2 = 2 - p$, $f_2(p;\ 2-2p;\ -p^2+3p-1)$;

для $\lambda_3 = 4 - p$, $f_3(0;\ 0;\ 1)$.

к) $p \neq 2$; для $\lambda_1 = p$, $f_1(2;\ 0;\ -1)$; $\lambda_2 = 4 - p$,

для $f_2(-2+2p;\ 8-4p;\ p^2-2p-1)$;

для $\lambda_3 = 6 - p$, $f_3(0;\ 0;\ 1)$.

л) $p \neq 1$; для $\lambda_1 = -1$, $f_1\left(1;\ 1;\ 0\right)$;

для $\lambda_2 = -2$, $f_2\left(1;\ 0; -1\right)$;

для $\lambda_3 = -p$, $f_3\left(p;\ p;\ 1-p\right)$.

8. а) $P \in [-3,\ 3] \cup \{-5\}$.

б) $P \in [-4,\ 4] \cup \{5\}$.

9. а) $\lambda_1 = 1$, $f_1 = \left(1; -1; 2\right)$;

$\lambda_{2,3} = 2 \pm i$, $f_{2,3} = g_1 \pm i \cdot g_2$, где $g_1 = \left(1; -2;\ 3\right)$, $g_2 = \left(0; -1;\ 2\right)$.

б) $\lambda_1 = 1$, $f_1 = \left(1; 0; 1\right)$;

$\lambda_{2,3} = 2 \pm i$, $f_{2,3} = g_1 \pm i \cdot g_2$, где $g_1 = \left(5; -5;\ 8\right)$, $g_2 = \left(0;\ 0;\ 1\right)$.

Ответы на дополнительные задачи

18. $Y = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 14/4 \end{pmatrix}$.

20. Существует, $y = T^{-1}x$.

21. а) $\chi_1(\lambda) = (\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{5})$.

б) $\chi_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 42)$.

в) $\dim(Ker(B)) = 1$, $\dim(\mathrm{Im}(B)) = 1$.

XVIII. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

Определения и формулы

Пусть в пространстве V существует базис из собственных векторов оператора A, что эквивалентно наличию разложения $L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$, где L_j — собственное подпространство, отвечающее собственному значению α_j. Тогда подпространство W инвариантно тогда и только тогда, когда $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m$, где $W_j = W \cap L_j$.

Подпространство, инвариантное относительно линейного оператора, называется неприводимым, если оно не содержит других инвариантных подпространств, отличных от себя самого и нулевого подпространства.

Комплексному собственному значению $\lambda = a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ оператора A в R^n сопоставляется тоже комплексный собственный вектор-столбец $Z = X + iY \in C^n$. Он является решением комплексной СЛАУ $(A - \lambda E) \cdot X = \overline{0}$. Вектор-столбцу Z соответствует двумерное неприводимое инвариантное подпространство $L\{X, Y\} \subseteq R^n$, в котором ограничение $A|_L$ в базисе $\{X, Y\}$ характеризуется матрицей

$$A_{\{X,Y\}} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Такой оператор представляет собой комбинацию поворота и растяжения.

Размерность неприводимого инвариантного подпространства в действительном линейном пространстве не превосходит двух.

Для любого подпространства L, инвариантного относительно линейного оператора A, характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ оператора A делится на характеристический многочлен $\chi_1(\lambda)$ оператора ограничения $A|_L$.

Если V раскладывается в прямую сумму $L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_m$ подпространств, инвариантных относительно оператора A, то характеристический многочлен оператора A равен произведению характеристических многочленов операторов A_j, где A_j — ограничение оператора A на подпространство L_j.

Минимальным многочленом для линейного оператора A называется приведенный многочлен $Q(t)$, имеющий наименьшую степень среди всех многочленов, для которых $Q(A) = 0$.

В конечномерном пространстве у любого оператора существует минимальный многочлен. Любой многочлен $P(t)$, для которого $P(A)=0$, делится на минимальный многочлен.

Характеристический многочлен оператора делится на его минимальный многочлен.

Теорема Гамильтона-Келли: для любого оператора A верно $\chi(A)=0$.

Набор корней характеристического многочлена $\chi(t)$ и минимального многочлена $Q(t)$ линейного оператора A одинаковый.

Базис из собственных векторов у линейного оператора A существует тогда и только тогда, когда минимальный многочлен оператора A равен $Q(t)=\prod_{j=1}^{m}(t-\alpha_j)$, где α_j — все различные собственные значения оператора.

Примеры решения задач

Пример 1. Линейный оператор A действует в пространстве E^3. Перечислите все его собственные инвариантные одномерные и двумерные подпространства.

а) $A=P_\pi$ — оператор ортогонального проектирования на плоскость π.

б) $A=S_\pi$ – оператор симметрии относительно плоскости π.

в) $A=V_{a,\phi}$ — вращение вокруг оси $L\{a\}$ на угол $\phi\neq 180°$.

Решение. а) Из определения собственного вектора следует, что одномерные инвариантные подпространства любого линейного оператора записываются в виде $L=L\{a\}$, где a — произвольный собственный вектор. Для оператора ортогонального проектирования собственные векторы с собственным значением единица — все ненулевые векторы подпространства π, собственные векторы с собственным значением нуль — ненулевые векторы ортогонального дополнения $\pi^\perp$.

Двумерное инвариантное подпространство, согласно теореме об инвариантных подпространствах оператора, у которого имеется базис из собственных векторов, должно быть линейной оболочкой двух собственных векторов. Если оба собственных вектора принадлежат плоскости π, то это сама плоскость π. Если один принадлежат плоскости π, а другой является нормалью к π, то линейной оболочкой оказывается плоскость, перпендикулярная π.

Замечание. Попробуйте решить задачу, не используя теорему о разложении инвариантного подпространства.

б) Инвариантные подпространства у операторов P_π и S_π одинаковые.

в) Единственные инвариантные подпространства — прямая $L\{a\}$, которая является осью вращения, и перпендикулярная ей плоскость π. Других инвариантных одномерных подпространств нет, так как нет другого собственного вектора, не коллинеарного a. Другого инвариантного двумерного подпространства тоже нет, так как иначе его пересечение с плоскостью π было бы инвариантным одномерным подпространством.

Пример 2. В пространстве E^3 задан оператор P_π ортогонального проектирования на плоскость $\pi:\{x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

а) Задайте с помощью СЛАУ двумерное инвариантное подпространство L_1, которое содержит вектор $b=(3;\ 2;\ 5)$.

б) Является ли инвариантным подпространство

$$L_2 = L\{a_1(1;\ 3;\ 2),\ a_2(1;\ 11;\ 4)\}?$$

Решение. а) Искомое двумерное инвариантное подпространство содержит проекцию $g = P_\pi b$ вектора b на плоскость π. При этом $g \neq \overline{0}$, так как вектор b не ортогонален π. Тогда инвариантное подпространство содержит и ортогональную составляющую $h = b - g$. Подстановка в уравнение показывает, что $b \notin \pi$, следовательно, $h \neq \overline{0}$. Заметим, что вектор h коллинеарен вектору нормали $n=(1;-1;1)$ к плоскости π. Поэтому $L_1 = L\{b,g\} = L\{b,h\} = L\{b,n\}$.

Инвариантность подпространства проверяется непосредственно:

$$P_\pi(L_1) = L\{P_\pi(b), P_\pi(n)\} = L\{P_\pi(b), \overline{0}\} = L\{P_\pi(b)\} \subset L_1.$$

Стандартная процедура позволяет найти СЛАУ для подпространства $L\{b,n\}$:

$$L_1:\{-7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0.$$

б) Надо проверить условия $L_2 = \pi$ или $L_2 \perp \pi$. Первое условие не выполняется, так как $a_2 \notin \pi$ (хотя $a_1 \in \pi$). Второе условие эквивалентно $n \in L_2$. Для проверки этого включения надо найти ранг набора векторов $\{a_1, a_2, n\}$. Вычисления показывают, что ранг набора равен двум, следовательно, $n \in L_2$, то есть подпространство L_2 инвариантное.

Пример 3. В пространстве R^3 линейный оператор A задан матрицей A_e в стандартном базисе e. Опишите все одномерные и двумерные инвариантные подпространства этого оператора. Двумерные подпространства задайте с помощью СЛАУ в базисе e.

$$\text{а)}\ A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \text{б)}\ A_e = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -4 & 5 & -4 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Найдем характеристическое уравнение для матрицы A_e:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

Для оператора A существует базис $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ из собственных векторов, соответствующих трем различным собственным значениям $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Собственные векторы являются решениями СЛАУ $B_k X = \overline{0}$ с матрицами

$$B_1 = A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получим

$$f_1 = (1;\ 0; -1),\ f_2 = (1; -1;\ 1),\ f_3 = (1;\ 0;\ 1).$$

Одномерные инвариантные подпространства — это три прямые

$$V_1 = L\{f_1\}, V_2 = L\{f_2\}, V_3 = L\{f_3\}.$$

При наличии базиса из собственных векторов с попарно различными собственными значениями любое инвариантное подпространство L оператора A представляется в виде

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3, \text{ где } L_1 \subseteq V_1,\ L_2 \subseteq V_2,\ L_3 \subseteq V_3.$$

Подпространство L двумерное, только если в прямой сумме два слагаемых одномерны, а третье нулевое. Получаем всего три варианта

$$L_1 = V_2 \oplus V_3 = L\{f_2, f_3\},\ L_2 = V_1 \oplus V_3 = L\{f_1, f_3\},\ L_3 = V_1 \oplus V_2 = L\{f_1, f_2\}.$$

Зная координаты векторов f_1, f_2, f_3, можно получить СЛАУ для этих подпространств:

$$L_1 : \{x_1 - x_3 = 0,\ L_2 : \{x_2 = 0,\ L_3 : \{x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

б) Для нахождения характеристического многочлена для матрицы A_e используем формулу

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + trA_e \cdot \lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \cdot \lambda + \det A_e.$$

Получим характеристическое уравнение

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0.$$

Для нахождения собственных векторов следует решить две СЛАУ:

$$(A - E) \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -4 & 4 & -4 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0},$$

$$(A - 2E) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 3 & -4 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}.$$

Для первой системы получим два вектора $f_1(1; 0; -1), f_2 = (0; 1; 1)$, для второй системы $f_3 = (-3; 4; 6)$.

Для оператора A существует разложение $R^3 = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = L\{f_1, f_2\}$— двумерное собственное подпространство (плоскость), отвечающее собственному значению $\lambda_1 = 1$, $H_2 = L\{f_3\}$ — собственное подпространство (прямая), отвечающее собственному значению $\lambda_2 = 2$. Одномерные инвариантные подпространства — это все прямые в H_1 или прямая H_2.

Любое двумерное инвариантное подпространство L оператора A представляется в виде

$$L = L_1 \oplus L_2, \text{ где } L_1 \subseteq H_1,\ L_2 \subseteq H_2.$$

Если $L_2 = \{\overline{0}\}$, то $L_1 = H_1$. В таком случае подпространство L задается СЛАУ

$$L : \{x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Второй вариант — когда $L_2 = H_2$, а L_1 — любая прямая в H_1. В этом случае L — любая плоскость, содержащая f_3. Координаты вектора f_3 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + \quad x_3 = 0 \end{cases}.$$

Любую плоскость, содержащую f_3, можно описать уравнением, которое является линейной комбинацией двух уравнений системы для вектора f_3:

$$L : \{(4a + 2b)x_1 + 3ax_2 + bx_3 = 0 \text{ с двумя параметрами } a, b \in R.$$

При такой записи разным парам параметров может соответствовать одно подпространство. Для однозначного представления плоскости L можно использовать следующий прием:

$$\text{либо } L:\{4x_1+3x_2=0, \text{ либо } L:\{(4a+2)x_1+3ax_2+x_3=0,\ a\in R.$$

Пример 4. Линейный оператор A в пространстве R^3 задан матрицей в стандартном базисе e:

$$A_e=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Найдите разложение $R^3=L_1\oplus L_2=L\{f_1\}\oplus L\{f_2,f_3\}$ в прямую сумму одномерного и двумерного подпространств, инвариантных относительно оператора A. Укажите матрицу A_f оператора A в базисе $f=\{f_1,f_2,f_3\}$.

Решение. Характеристический многочлен оператора

$$\chi(\lambda)=-\lambda^3+5\lambda^2-9\lambda+5=(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+5).$$

Собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_{2,3}=2\pm i$. Для $\lambda_1=1$ находим собственный вектор: $f_1=(1;\ 1;\ 0)$. Для того чтобы найти комплексный собственный вектор с собственным значением $\lambda_2=2+i$, надо решить комплексную СЛАУ

$$\begin{cases}(-1-i)z_1+z_3=0\\ (-1-i)z_2+3z_3=0\\ \mathrm{z}_1-z_2+(1-i)z_3=0.\end{cases}$$

Комплексное решение $z=(1-i;\ 3-3i;\ 2)$. Представим его в виде суммы действительного и мнимого слагаемых

$$z=f_2+i\cdot f_3, \text{ где } f_2=(1;\ 3;\ 2),\ f_3=(-1;-3;\ 0).$$

Тогда $L=L\{f_2,f_3\}$ — двумерное инвариантное подпространство. Из формулы

$$Az=Af_2+i\cdot Af_3=\lambda_2 z=(2+i)(f_2+i\cdot f_3)=(2f_2-f_3)+i\cdot(f_2+2f_3)$$

следует, что

$$Af_2=2f_2-f_3,\ Af_3=f_2+2f_3.$$

Эти разложения можно вычислить и непосредственно:

$$A_e f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} = 2f_2 - f_3,$$

$$A_e f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = f_2 + 2f_3.$$

Данные соотношения показывают, что подпространство $L_2 = L\{f_2, f_3\}$ инвариантное. Матрица в базисе $\{f_2, f_3\}$ ограничения оператора A на подпространство L_2 равна $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Полностью матрица оператора A в базисе $\{f_1, f_2, f_3\}$ имеет вид

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Линейный оператор A в пространстве R^3 задан матрицей в стандартном базисе e:

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выясните, является ли подпространство $L:\{x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ инвариантным относительно действия оператора A.

Решение. Набор $f = \{f_1(2;-1;\ 0), f_2 = (1;\ 0;\ 1)\}$ является базисом в пространстве L. Имеем

$$Af_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},\ Af_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Подстановка координат векторов Af_1 и Af_2 в уравнение $L:\{x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ показывает, что $Af_1 \in L$, $Af_2 \in L$. Поэтому подпространство L инвариантное.

Пример 6. В пространстве функций на прямой задано подпространство $V = L\{f\}$, где f — линейно независимый набор, состоящий из функций

$$f_1 = e^x \cos x,\ f_2 = e^x,\ f_3 = e^x \sin x,\ f_4 = e^{2x}.$$

Линейный оператор в V задан условием $A\big(f(x)\big)=e^{-1}\cdot f(x+1)$.

а) Покажите, что $A(V)\subseteq V$, и укажите матрицу этого линейного оператора в базисе f;

б) Перечислите все инвариантные подпространства оператора A, задав их в виде линейных оболочек векторов базиса f.

Решение. а) Вычислим действие оператора A на векторах базиса:

$$Af_1=e^{-1}e^{x+1}\cos(x+1)=e^x(\cos x\cdot\cos 1-\sin x\cdot\sin 1)=\cos 1\cdot f_1-\sin 1\cdot f_3;$$
$$Af_2=e^{-1}e^{x+1}=e^x=f_2;$$
$$Af_3=e^{-1}e^{x+1}\sin(x+1)=e^x(\sin x\cdot\cos 1+\cos x\cdot\sin 1)=\sin 1\cdot f_1+\cos 1\cdot f_3;$$
$$Af_4=e^{-1}e^{2x+2}=e\cdot e^{2x}=e\cdot f_4.$$

Итак, каждый образ Af_k выражается через базис f. Значит, $A(V)\subseteq V$. Матрица линейного оператора в базисе f принимает вид

$$A_f=\begin{pmatrix}\cos 1 & 0 & \sin 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin 1 & 0 & \cos 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & e\end{pmatrix}.$$

б) Пространство V разлагается в прямую сумму трех инвариантных подпространств

$$V=V_1\oplus V_2\oplus V_3,\ \text{где}\ V_1=L\{f_2\},\ V_2=L\{f_4\},\ V_3=L\{f_1,f_3\}.$$

Пересечение инвариантного подпространства L с каждым V_j также инвариантно. Но каждое подпространство V_j неприводимо и содержит всего два инвариантных подпространства: нулевое подпространство и само V_j. Значит, либо $L\cap V_j=\varnothing$, либо $V_j\subseteq L$.

В результате перебора комбинаций всех прямых сумм получим восемь вариантов инвариантных подпространств:

$$\dim(L)=0:\quad L_1=\{\overline{0}\};$$
$$\dim(L)=1:\quad L_2=V_1=L\{f_2\},\qquad L_3=V_2=L\{f_4\};$$
$$\dim(L)=2:\quad L_4=V_1\cdot V_2=L\{f_2,f_4\},\qquad L_5=V_3=L\{f_1,f_3\};$$
$$\dim(L)=3:\quad L_6=V_1\cdot V_3=L\{f_2,f_1,f_3\},\qquad L_7=V_2\cdot V_3=L\{f_4,f_1,f_3\};$$
$$\dim(L)=4:\quad L_8=V.$$

Типовые задачи

1. В пространстве E^3 или E^4 задано линейное подпространство L. Представьте в виде линейной оболочки минимальное линейное подпростран-

ство L_1, инвариантное относительно оператора P ортогонального проектирования на L и содержащее вектор a.

а) $L:\{3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, $a(1;2;1)$.

б) $L:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, $a(3;1;0)$.

в) $L = L\{a_1(1;0;-1), a_2(2;-1;1)\}$, $a(-1;-1;3)$.

г) $L:\{2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$, $a(1;2;1)$.

д) $L:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, $a(0;0;7)$.

е) $L:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $a(2;1;0;0)$.

ж) $L:\{x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $a(1;2;3;4)$.

Дополнительно.

з) $L:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$, $a(1;1;1;-1)$.

и) $L:\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$, $a(2;0;1;0)$.

к) $L:\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, $a(0;1;0;2)$.

л) $L:\{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$, $a(4;3;2;1)$.

м) $L:\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$, $a(1;0;1;1)$.

2. В пространстве E^3 или E^4 задано линейное подпространство L. Приведите СЛАУ для минимального линейного подпространства L_1, инвариантного относительно оператора S зеркальной симметрии относительно подпространства L и содержащего вектор a.

а) $L:\{x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$, $a(-1;1;3)$.

б) $L:\{2x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $a(1;1;3)$.

в) $L:\{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $a(1;1;2;2)$.

3. Проверьте, инвариантно ли подпространство L_1 для оператора S зеркальной симметрии относительно подпространства $L \subset E^n$.

а) $L:\{3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$, $L_1 = L\{a_1(1;0;-1), a_2(2;-1;3)\}$.

б) $L:\{2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $L_1 = L\{a_1(5;3;1), a_2(1;2;1)\}$.

в) $L:\{x_1-2x_2+2x_3=0,\ L=L\left\{a_1\left(-4;3;5\right),a_2\left(-2;1;2\right)\right\}.$

Дополнительно.

г) $L:\{x_1+x_2-x_3-x_4=0,\ L=L\left\{a_1(1;4;-5;-2),\ a_2(2;-1;\ 2;-1)\right\}.$

д) $L:\{x_1-x_2+x_3-x_4=0,\ L=L\left\{a_1(1;2;-5;-2),\ a_2(2;-1;\ 2;-1)\right\}.$

е) $L:\{x_1-x_2-x_3-x_4=0,\ L_1=L\left\{a_1\left(2;-1;-2;1\right),a_2\left(1;-1;0;-2\right)\right\}.$

4. В пространстве E^3задан оператор P_π ортогонального проектирования на плоскость π.

(1) Найдите матрицу P_e этого оператора в стандартном базисе $\{e_1,e_2,e_3\}$.

(2) Задайте в виде СЛАУ двумерное инвариантное относительно P_π подпространство $L_a\subset E^3$, которое содержит вектор a.

(3) Будет ли инвариантным относительно P_π подпространство L_1?

а) $\pi=L\{\ a_1(1;-1;-1,),\ a_2(3;\ 1;-1)\ \},\ a=(2;\ 1;\ 1),$
$L_1:\{3x_1-x_2-2x_3=0.$

б) $\pi:\{x_1+2x_2-x_3=0,\ a=(-2;\ 1;\ 1),\ L_1=L\{b_1(1;2;5),\ b_2(2;1;4)\}.$

Дополнительно.

в) $\pi=L\{\ a_1(1;-1;-1),\ a_2(4;\ 5;\ 2)\ \},\ a=(2;\ 1;\ 1),$
$L_1:\{x_1+2x_2-3x_3=0.$

5. В пространстве E^3 задан оператор S_π зеркального отражения относительно плоскости π.

(1) Найдите матрицу этого оператора в каноническом базисе $\{e_1,e_2,e_3\}$.

(2) Задайте в виде СЛАУ двумерное инвариантное относительно S_π подпространство L_a в E^3, которое содержит вектор a.

(3) Будет ли инвариантным относительно S_π подпространствоL_1?

а) $\pi:\{2x_1-x_2-x_3=0,\ a=(1;\ 2;\ 1),\ L_1=L\{b_1(2;1;-3),\ b_2(1;1;1)\}.$

б) $\pi=L\{\ a_1(1;\ 1;\ 2,),\ a_2(1;-2;-1)\ \},\ a=(2;\ 1;\ 1),$
$L_1:\{3x_1-x_2+2x_3=0.$

Дополнительно.

в) $\pi:\{2x_1+3x_2-x_3=0,\ a=(2;\ 1;\ 3),\ L_1=L\{b_1(2;-1;1),\ b_2(-1;2;4)\}.$

6. Для оператора с матрицей A_e задайте в виде линейной оболочки минимальное инвариантное линейное подпространство L, содержащее вектор a.

а) $A_e=\begin{pmatrix}5&-6&12\\-2&3&-5\\-2&4&-6\end{pmatrix},\ a(0;1;0).$

б) $A_e=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&1\\1&2&3\end{pmatrix},\ a(1;1;0).$

в) $A_e = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -5 \\ -9 & 4 & 10 \end{pmatrix}$, $a(1;0;1)$.

7. Для матрицы A выразите матрицу A^{-1} в виде многочлена от A.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -8 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$. в) $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 3 \\ 3 & -8 & 3 \\ 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

г) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. д) $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 3 \\ 9 & -4 & 3 \\ -9 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 6 & 5 & -6 \\ 6 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

8. Линейный оператор A в пространстве R^3 задан матрицей A_e. Используя комплексный собственный вектор, найдите базис $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ такой, что R^3 раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств $L\{f_1\}$ и $L\{f_2, f_3\}$. Укажите матрицу A_f.

а) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -4 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. в) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

г) $A_e = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$. д) $A_e = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 4 & 9 & -6 \\ 4 & 12 & -7 \end{pmatrix}$. е) $A_e = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -14 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

ж) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 22 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. з) $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

9. Пусть A – линейный оператор такой, что $A^2 = A$. Пусть при этом $A \neq E$ и $A \neq \overline{0}$. Докажите, что тогда $L = L_1 \oplus L_2$, где ограничение оператора A на L_1 равно E, а ограничение оператора A на L_2 равно нулю.

10. Пусть A – линейный оператор такой, что $A^2 = E$. Пусть при этом $A \neq E$ и $A \neq -E$. Докажите, что в этом случае $L = L_1 \oplus L_2$, где ограничение оператора A на L_1 равно E, а ограничение оператора A на L_2 равно $-E$.

11. Дано подпространство $L = L\{1, \cos 2x, \sin 2x, \cos^2 x, \sin^2 x\}$ в пространстве всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на числовой прямой. Докажите, что подпространство L инвариантно относительно оператора дифференцирования $A(f(x)) = f'(x)$. Найдите все одномерные и двумерные инвариантные подпространства относительно оператора A, содержащиеся в L.

12. Известно, что числа $\lambda = 2$ и $z = 1+i$ являются собственными значениями матрицы A размером (3×3) с действительными элементами. Не приводя матрицу A к диагональному виду, представьте обратную матрицу A^{-1} в виде многочлена от матрицы A.

13. Известно, что числа $\lambda = -2$ и $z = 2-i$ являются собственными значениями матрицы A размером (3×3) с действительными элементами. Выпишите характеристический многочлен матрицы A^2.

14. Линейные операторы A и B перестановочны, то есть $AB = BA$, V_α – собственное подпространство, отвечающее собственному значению α. Докажите, что подпространство V_α инвариантно относительно оператора B.

15. Линейные операторы A и B перестановочны, то есть $AB = BA$, вектор f – собственный с собственным значением α для линейного оператора A, причем ГК(α)= 2. Докажите, что набор векторов $\{f, B(f), B^2(f)\}$ линейно зависим.

16. Для линейного оператора A в R^n и вектора f степень минимального многочлена $Q_f(t)$ равна m ($Q_f(t)$ – многочлен минимальной степени такой, что $Q_x(A)f = \overline{0}$). Докажите, что набор векторов $\{f, Af, A^2 f, \ldots, A^{m-1}f\}$ линейно независим, а линейная оболочка $L = L\left\{f, Af, \ldots A^{m-1}f\right\}$ инвариантна относительно оператора A.

Ответы на типовые задачи

1. а) $L_1 = L\{n(3;-1;2),\ a(1;2;1)\}$.
   б) $L_1 = L\{a(3;1;0)\}$.
   в) $L_1 = L\{n(1;3;1),\ a(-1;-1;3)\}$.
   г) $L_1 = L\{a(1;2;1)\}$.
   д) $L_1 = L\{a(0;0;7),\ g(1;-3;5)\}$, где $g = Pa$.
   е) $L_1 = L\left\{a(2;1;0;0), g(1;\frac{1}{2};-1;-\frac{1}{2})\right\}$, $g = Pa$.
   ж) $L_1 = L\{n(1;\ 1;-1;-1), a(1;\ 2;\ 3;\ 4)\}$.
   з) $L_1 = L\{a(1;\ 1;\ 1;-1)\}$.
   и) $L_1 = L\{a(2;\ 0;\ 1;\ 0), g(2;-1;\ 1;-2)\}$, где $g = 2Pa$.

к) $L_1 = L\{a(0;\ 1;\ 0;\ 2),\ g(0;\ 1;\ 0;\ 1)\}$, где $g = \frac{2}{3} \cdot Pa$.

л) $L_1 = L\{a(4;\ 3;\ 2;\ 1),\ n(1;-1;\ 1;-1)\}$.

м) $L_1 = L\{a(1;\ 0;\ 1;\ 1)\}$.

2. а) $L_1 : \{8x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$.

   б) $L_1 : \{4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$.

   в) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

3. а) Инвариантно. б) Не инвариантно. в) Инвариантно.
   г) Инвариантно. д) Не инвариантно. е) Не инвариантно.

4. а) $P_e = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $L_a : \{x_1 - x_2 - x_3 = 0$; L_1 инвариантно.

   б) $P_e = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $L_a : \{3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0$; L_1 инвариантно.

   в) $P_e = \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 2 & -3 \\ 2 & 10 & 6 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $L_a : \{x_1 - x_2 - x_3 = 0$; L_1 не инвариантно.

5. а) $S_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\{L_a : x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0$;

   не инвариантно, так как $n\ (2;-1;-1) \notin L_1$.

   б) $S_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $L_a : \{2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$;

   инвариантно, так как $n\ (1;1;-1) \in L_1$.

   в) $S_e = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -6 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$; $\{L_a : 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0$;

   инвариантно, так как $L_1 = \pi$.

6. а) $L = L\{a(0;1;0), b(-6;3;4)\}$.

   б) $L = E^3$. в) $L = L\{a(1;0;1)\}$.

7. а) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - E)$. б) $A^{-1} = \frac{1}{11} \cdot (A^2 - A - 13E)$.

в) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A + E)$. г) $A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (A + 2E)$.

д) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - E)$. е) $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - E)$.

8. а) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(0;\ 1;\ 1)\} \oplus L\{f_2(1;\ 0;\ 0), f_3(-1;\ 1;\ 2)\}$.

б) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(0;\ 1;\ 1)\} \oplus L\{f_2(1;\ 0;\ 1), f_3(-1;\ 1;\ 1)\}$.

в) $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(1;\ 0; -1)\} \oplus L\{f_2(2; -1; -1), f_3(-1;\ 1;\ 1)\}$.

г) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(3;\ 2; -1)\} \oplus L\{f_2(3;\ 2;\ 0), f_3(-1;\ 0;\ 2)\}$.

д) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(1;\ 1;\ 2)\} \oplus L\{f_2(0;\ 1;\ 2), f_3(-2;\ 1;\ 0)\}$.

е) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(2; -1;\ 1)\} \oplus L\{f_2(1;\ 1;\ 1), f_3(1; -1;\ 0)\}$.

ж) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(\quad 1;\ 2;\ 1)\} \oplus L\{f_2(1;\ 1;\ 0), f_3(3;\quad 1;\quad 1)\}$.

з) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$R^3 = L\{f_1(\quad 1;\ 2;\ 1)\} \oplus L\{f_2(1;\ 1;\ 0), f_3(1;\quad 1;\quad 1)\}$.

Ответы на дополнительные задачи

12. $A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (A^2 - 4A + 6E)$.

13. $\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 49\lambda + 100$.

XIX. ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Определения и формулы

Блочной матрицей называется матрица A размером $M \times N$, элементами которой являются обычные матрицы A_{JK} (будем называть их клетками), причем количество строк в матрицах J-й строки одинаково и равно M_J, а количество столбцов в матрицах K-го столбца одинаково и равно N_K.

Если $M = N$ и $M_K = N_K$ для всех K, блочная матрица называется квадратной. Все матрицы, лежащие на главной диагонали квадратной блочной матрицы, квадратные в обычном смысле.

Квадратная блочная матрица называется диагональной, если все матрицы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Квадратная блочная матрица называется верхней треугольной, если равны нулю все матрицы, лежащие под главной диагональю.

Определитель треугольной (в частности, диагональной) квадратной блочной матрицы равен произведению определителей матриц, лежащих на главной диагонали.

Пусть пространство оператора A каким-то способом разложено в прямую сумму $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_M$. Выберем в каждом подпространстве V_K базис F_K, и пусть базис F пространства V образован объединением всех базисов F_K. Тогда матрица оператора A_F представима в виде квадратной блочной матрицы порядка M. Клетка A_{JK} этой матрицы состоит из тех коэффициентов a_{jk} матрицы A_F, для которых базисный вектор $f_j \in F_J$, а $f_k \in F_K$.

При этих предположениях подпространство V_K инвариантно для оператора A тогда и только тогда, когда в K-м столбце блочной матрицы A_F отлична от нуля только клетка A_{KK}, лежащая на главной диагонали. Все подпространства V_K инвариантные тогда и только тогда, когда матрица A_F диагональная.

Числовая матрица порядка p, которая содержит одно и то же число α на главной диагонали ($a_{jj} = \alpha$ при всех j), единицы над главной диагональю ($a_{j,j+1} = 1$ при $j < p$) и нули в остальных ячейках, называется жордановой клеткой размера p с собственным значением α.

Характеристический многочлен жордановой клетки равен $\chi(\lambda) = (\alpha - \lambda)^p$.

Диагональная квадратная блочная матрица, в которой каждая матрица на диагонали является жордановой клеткой, называется жордановой матрицей.

Если все собственные значения жордановых клеток жордановой матрицы равны α, то такая матрица называется жордановым блоком с собственным значением α. Для матрицы, которая является жордановым блоком, характеристический многочлен $\chi(\lambda)=(\alpha-\lambda)^n$.

Если матрица оператора в некотором базисе жорданова, то говорят, что оператор приведен к жордановой нормальной форме. Базис, в котором матрица оператора является жордановой, называется жордановым базисом. Без ограничения общности можно считать, что жорданова нормальная форма состоит из жордановых блоков, каждый из которых состоит из жордановых клеток (возможно, для этого придется переставлять векторы жорданова базиса).

Основная теорема о приведении к жордановой нормальной форме: оператор, все собственные значения которого действительные, приводится к жордановой нормальной форме.

В комплексном линейном пространстве любой линейный оператор приводится к жордановой нормальной форме.

Оператор B, для которого B^p при некотором p, называется нильпотентным оператором. Любой нильпотентный оператор приводится к жордановой нормальной форме.

Если для оператора A имеет место равенство $(A-\alpha \mathrm{E})^p=0$ при некоторых α и p, то оператор $B=A-\alpha\mathrm{E}$ нильпотентный. Жорданов базис для оператора B одновременно является жордановым базисом для оператора A.

Пусть жорданов базис для нильпотентного оператора B, матрица которого состоит из одной жордановой клетки размера p с собственным значением нуль, состоит из набора векторов $f_1, f_2, \ldots, f_p$. Определение матрицы оператора в сочетании с видом жордановой клетки показывает, что действие оператора B на векторах базиса можно представить в виде цепочки

$$f_p \to f_{p-1} \to \ldots \to f_2 \to f_1 \to \overline{0}.$$

Базисный вектор f_p называется корневым вектором для данной жордановой клетки. Этот вектор характеризуется тем, что $B^p(f_p)=\overline{0}$, а $B^{p-1}(f_p)\neq\overline{0}$. Зная корневой вектор, можно получить остальные базисные векторы с помощью формулы $f_k=B^{p-k}(f_p)$.

Индекс k называется высотой вектора f_k. Высота вектора x для нильпотентного оператора B определяется из соотношения $B^k(x)=\overline{0}$, но $B^{k-1}(x)\neq\overline{0}$.

Для нильпотентного оператора B вектор g называется присоединенным к ненулевому вектору f, если $Bg = f$. В жордановой клетке базисный вектор f_{k+1} присоединен к базисному вектору f_k.

Для нильпотентного оператора B число $\dim\left(\mathrm{Im}(B)\cap Ker(B)\right)$ равно количеству клеток размером больше единицы.

Жордановой нормальной форме оператора A в пространстве V соответствует разложение в прямую сумму $V = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s$, где все L_j – инвариантные подпространства. При этом матрица ограничения оператора A на подпространство L_j является жордановой клеткой с собственным значением α_j в жордановом базисе F_j. Жорданов базис F оператора A является объединением жордановых базисов клеток: $F = \left\{F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_s\right\}$.

Подпространства L_j выбираются неоднозначно. Однако количество жордановых клеток, соответствующих одному и тому же собственному значению α_i, равно $\dim\left(Ker\left(A-\alpha_i \mathrm{E}\right)\right)$ и не зависит от жорданова базиса.

Прямая сумма H_i всех подпространств L_j, соответствующих одному и тому же собственному значению α_i, называется корневым подпространством. Корневое подпространство $H_i = Ker\left(\left(A-\alpha_i \mathrm{E}\right)^p\right)$, где p – максимальный размер жордановой клетки с собственным значением α_i. Этой формулой корневое подпространство H_i определено однозначно.

Любое инвариантное подпространство оператора A является прямой суммой каких-то инвариантных подпространств L_i, принадлежащих корневым подпространствам H_i.

В жордановой клетке размера p каждое инвариантное подпространство является линейной оболочкой $L\left\{f_1, f_2, \ldots, f_k\right\}$ базисных векторов для некоторого k (k меняется от 0 до p).

Примеры решения задач

Пример 1. Линейный оператор A задан в базисе e матрицей A_e. Приведите оператор к жордановой форме, укажите возможный жорданов базис и матрицу перехода к этому базису.

$$\text{а)}\ A_e = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -24 & -7 & -10 \end{pmatrix}. \qquad \text{б)}\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -3 & -13 & 21 \\ -2 & -10 & 16 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Характеристическое уравнение для оператора A будем считать по формуле

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + trA_e \cdot \lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \cdot \lambda + \det A_e.$$

Получим

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = -(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Единственное собственное значение $\lambda = 2$ имеет кратность 3. Каждый собственный вектор является решением системы

$$B_e \cdot X = (A_e - 2E) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -3 & -15 & 21 \\ -2 & -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}.$$

Ранг системы равен 1, поэтому $\dim(KerB) = 2$. Значит, жорданова форма нильпотентного оператора B содержит две клетки. Единственный вариант размеров клеток 1 и 2. Итак, мы уже можем указать жордановы формы операторов B и A:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_f = B_f + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно подобрать базисный вектор f_{11} клетки размера 1 и базисные векторы f_{21} и f_{22} клетки размера 2. Сначала способом «сверху вниз» построим базисные векторы клетки размера 2. Подбором найдем подходящий корневой вектор f_{22}, для которого $B_e f_{22} \neq \overline{0}$. Например, $f_{22} = (1;\ 0;\ 0)$. Тогда

$$f_{21} = B_e f_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ -3 & -15 & 21 \\ -2 & -10 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного вектора f_{11} клетки размера 1 годится любое решение системы $B_e X = \overline{0}$, не коллинеарное вектору $f_{21} = (1;-3;-2)$. Пусть $f_{11} = (7;\ 0;\ 1)$. В итоге получим жорданов базис

$$f_{11} = (7;\ 0;\ 1),\ f_{21} = (1;-3;-2),\ f_{22} = (1;\ 0;\ 0).$$

Матрица перехода к жорданову базису

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Характеристическое уравнение для оператора A, вычисленное по известной формуле, равно

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

В отличие от матрицы пункта а) собственных значений два. Это накладывает определенные ограничения на выбор корневых векторов. Собственному значению $\lambda_1 = 0$ алгебраической кратности 1 соответствует жорданова клетка размера 1. Собственный вектор для $\lambda_1 = 0$ является решением СЛАУ

$$B_1 \cdot X = (A_e - 0 \cdot E) \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -24 & -7 & -10 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}.$$

Получим $f_{11} = (1; -2; -1)$.

Для собственного значения $\lambda_2 = 1$ система

$$B_2 \cdot X = (A_e - E) \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -24 & -7 & -11 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}$$

имеет ранг 2, поэтому геометрическая кратность корня равна 1. Значит, корню $\lambda_2 = 1$ соответствует одна жорданова клетка размера 2. Нам надо найти такую пару векторов $\{f_{21}, f_{22}\}$, что $B_2 f_{22} = f_{21}$, $B_2 f_{21} = \overline{0}$. Будем строить базис для клетки размером 2 способом «снизу вверх». Сначала, решив систему $B_2 f_{21} = \overline{0}$, найдем собственный вектор $f_{21} = (1; -5;\ 1)$. Затем найдем присоединенный к f_{21} вектор f_{22}. Для этого решим матричное уравнение

$$B_2 f_{22} = f_{21} \text{ или } B_2 \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ -24 & -7 & -11 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Получим $f_{22} = (0; -8;\ 5)$.

Итоговый жорданов базис для оператора A:

$$f = \{f_{11}(1; -2; -1), f_{21}(1; -5;\ 1), f_{22}(0; -8;\ 5)\}.$$

Жорданова нормальная форма оператора A и матрица перехода к жорданову базису

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & -8 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Для подбора пары векторов $\{f_{21}, f_{22}\}$ при построении жорданова базиса для клетки размера 2 можно также использовать способ «сверху вниз». Он заключается в нахождении такого частного решения f_{22} уравнения

$$B_2^2 \cdot X = \begin{pmatrix} -17 & -5 & -8 \\ 34 & 10 & 16 \\ 17 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0},$$

для которого $f_{21} = B_2 f_{22} \neq \overline{0}$. Годится вектор $f_{22} = (5; -17;\ 0)$, $f_{21} = B_2 f_{22} = (-1;\ 5; -1)$. Данный жорданов базис отличается от ранее найденного.

Пример 2. Линейный оператор A задан в базисе e матрицей A_e. Приведите оператор к жордановой форме, укажите возможный жорданов базис и матрицу перехода к этому базису.

а) $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & -1 \\ 8 & -5 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

б) $A_e = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & -9 \\ -4 & -6 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 13 & -6 & 16 & 7 \\ 0 & -9 & 0 & -25 \\ -9 & -1 & -11 & -19 \\ 0 & 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Характеристический многочлен матрицы A_e равен произведению множителя $(-1-\lambda)$ и характеристического многочлена матрицы

$$A'_e = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 \\ 8 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что $\chi(\lambda) = (\lambda + 1)^4$. Собственное значение $\lambda_1 = -1$ имеет алгебраическую кратность 4. Чтобы определить количество и размеры жордановых клеток, вычислим матрицы $B_e = A_e + E$, B_e^2 и B_e^3:

$$B_e = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 & -1 \\ 8 & -4 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_e^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_e^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из того, что $B_e^3 \neq 0$, следует, что максимальный размер жордановой клетки равен 4. Следовательно, жорданова форма оператора B состоит из одной клетки размера 4. Итак, мы уже можем указать жордановы формы операторов B и A:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Корневой вектор клетки размера 4 надо выбирать так, чтобы он не был корнем уравнения $B_e^3 \cdot X = \overline{0}$. Годится вектор $f_4 = (0;0;0;1)$. Тогда $f_3 = B_e f_4$, $f_2 = B_e f_3$, $f_1 = B_e f_2$. В итоге получим жорданов базис

$$f_1(1;2;0;0),\ f_2(1;0;1;0),\ f_3(-1;1;-2;0),\ f_4(0;0;0;1).$$

Матрица перехода к жорданову базису

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) Характеристический многочлен матрицы A_e равен произведению множителя $(-2-\lambda)$ и характеристического многочлена матрицы

$$A'_e = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что $\chi(\lambda) = (\lambda+2)^4$. Собственное значение $\lambda_1 = -2$ имеет алгебраическую кратность 4. Чтобы определить количество и размеры жордановых клеток, вычислим матрицы $B_e = A_e + 2E$, B_e^2 и B_e^3:

$$B_e = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 & -9 \\ -4 & -4 & -5 & 6 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_e^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_e^3 = 0.$$

Из того, что $B_e^2 \neq 0$, $B_e^3 = 0$, следует, что максимальный размер жордановой клетки равен 3. Следовательно, жорданова форма оператора B состоит из двух клеток размерами 3 и 1. Выпишем жордановы формы операторов B и A:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Корневой вектор f_{13} клетки размером 3 не должен быть корнем уравнения $B_e^2 \cdot X = \overline{0}$. Годится вектор $f_{13} = (1;0;0;0)$. Тогда

$$f_{12} = B_e f_{13} = (6;-4;-2;0),\ f_{11} = B_e f_{12} = (2;-2;0;0).$$

Корневым вектором клетки размера 1 может служить любое решение уравнения $B_e X = \overline{0}$, не коллинеарное вектору f_{11}. Годится вектор $f_{21} = (3;0;0;2)$. В итоге получим жорданов базис

$$f_{11}(2;-2;0;0),\ f_{12}(6;-4;-2;0),\ f_{13}(1;0;0;0),\ f_{21} = (3;0;0;2).$$

Матрица перехода к жорданову базису:

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

в) Чтобы облегчить задачу вычисления характеристического многочлена, временно поменяем в базисе базисные векторы e_2 и e_3. Тогда в новом базисе g характеристический многочлен треугольной блочной матрицы A_g равен произведению характеристических многочленов двух матриц $\begin{pmatrix} 13 & 16 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -9 & -25 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$ порядка 2. В итоге $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. Собственное значение $\lambda_1 = 1$ имеет алгебраическую кратность 4. Чтобы определить количество и размеры жордановых клеток, вычислим матрицы $B_e = A_e + 2E$, B_e^2 и B_e^3:

$$B_e = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 16 & 7 \\ 0 & -10 & 0 & -25 \\ -9 & -1 & -12 & -19 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}, B_e^2 = 0.$$

Из того, что $B_e^2 = 0$, следует, что максимальный размер жордановой клетки равен 2. Для жордановой формы возможны два варианта: две клетки размера 2 или три клетки размерами 2, 1 и 1. Ранг матрицы B_e равен 2, следовательно, общее число клеток равно числу $Ker(B) = 2$. Итак, верен вариант двух клеток размера 2. Выпишем жордановы формы операторов B и A:

$$B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если для данного собственного значения размеры всех жордановых клеток оператора одинаковые, строить их проще способом «снизу вверх». Сначала найдем базисные векторы в ядре оператора B. Они являются решениями системы

$$B_e X = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 16 & 7 \\ 0 & -10 & 0 & -25 \\ -9 & -1 & -12 & -19 \\ 0 & 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}.$$

В качестве базиса ядра оператора B выберем векторы

$$f_{11} = (4;0;-3;0), \ f_{21} = (1;5;2;-2).$$

Чтобы получить присоединенные векторы, нужно выбрать какие-нибудь частные решения систем $B_e X = f_{11}$ и $B_e X = f_{21}$. Например,

$$f_{12} = (3;0;-2;0), \ f_{22} = (-1;2;2;-1).$$

В итоге жорданов базис

$$f_{11}(4;0;-3;0), \ f_{12}(3;0;-2;0), \ f_{21}(1;5;2;-2), \ f_{22}(-1;2;2;-1).$$

Матрица перехода к жорданову базису $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Линейный оператор A задан в базисе e матрицей A_e. Приведите оператор к жордановой форме, укажите возможный жорданов базис и матрицу перехода к этому базису.

$$\text{а) } A_e = \begin{pmatrix} 17 & 12 & -6 & -7 \\ -24 & -17 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -7 \end{pmatrix}. \qquad \text{б) } A_e = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -4 & -10 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -2 & -10 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Характеристический многочлен треугольной блочной матрицы A_e равен произведению характеристических многочленов матриц $\begin{pmatrix} 17 & 12 \\ -24 & -17 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$. В итоге $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$. В отличие от матриц Примера 2 собственных значений два. Это накладывает определенные ограничения на выбор корневых векторов. Сначала найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda = 1$, который порождает клетку размером 1. Получим $f_{11} = (3;-4;0;0)$.

Будем искать клетки, соответствующие собственному значению $\lambda = -1$. Ранг матрицы $B_e = A_e + E$ равен 3, то есть $\dim\big(Ker(B)\big) = 1$, поэтому собственному значению $\lambda = -1$ соответствует одна клетка размером 3. Будем строить ее способом «снизу вверх».

Сначала решим уравнение

$$B_e \cdot X = (A_e + E) \cdot X = \begin{pmatrix} 18 & 12 & -6 & -7 \\ -24 & -16 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \overline{0}.$$

Его частное решение, например, $f_{21} = (2;-3;0;0)$. Затем найдем присоединенный вектор, решив уравнение $B_e X = f_{21}$. Выберем решение $f_{22} = (1;-1;3;-2)$. Следующий присоединенный вектор является решением уравнения $B_e X = f_{22}$. Можем взять $f_{23} = (-1;2;2;-1)$.

Теперь мы можем выписать матрицу перехода к жорданову базису и жорданову форму оператора A:

$$T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Характеристический многочлен матрицы A_e равен произведению множителя $(2 - \lambda)$ и характеристического многочлена матрицы

$$A'_e = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -4 & -6 & -5 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

В результате $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^3$. Сначала найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda = 1$, который порождает клетку размера 1. Получим

$$f_{11} = (2; -1; 2; 1).$$

Теперь будем строить клетки для собственного значения $\lambda = 2$. Вычислим матрицы $B_e = A_e - 2E$ и B_e^2:

$$B_e = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 & -10 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & -4 & -10 \\ 4 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \; B_e^2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 & 10 \\ 4 & 0 & -2 & -5 \\ -8 & 0 & 4 & 10 \\ -4 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Так как $rank(B_e) = 2$, то $\dim(Ker(B)) = 2$, поэтому собственному значению $\lambda = 2$ соответствуют две клетки. Единственный вариант размеров клеток 2 и 1. Способом «снизу вверх» их строить не получится, поскольку не у любого вектора из подпространства $Ker(B)$ есть присоединенный вектор. Используем способ «сверху вниз». Корневой вектор f_{22} клетки размера 2 следует искать среди решений уравнения $B_e^2 \cdot X = \overline{0}$, которые не являются решениями уравнения $B_e X = \overline{0}$. Выберем вектор $f_{22} = (1; 0; 2; 0)$. Тогда

$$f_{21} = B_e f_{22} = (0; 1; 0; 0).$$

Базисным вектором клетки размером 1 может служить любое решение СЛАУ $B_e X = \overline{0}$, не коллинеарное вектору f_{21}, например,

$$f_{31} = (3; 0; 1; 2).$$

В итоге получим жорданов базис, матрицу перехода к жорданову базису и жорданову форму оператора A:

$$f_{11}(2; -1; 2; 1),\; f_{21}(0; 1; 0; 0),\; f_{22}(1; 0; 2; 0),\; f_{31}(3; 0; 1; 2);$$

$$T_{e \to f} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. В подпространстве $L = L\{x^3, x^2, x, 1, x^2 y, xy, y\}$ линейного пространства многочленов от двух переменных оператор D действует по формуле

$$D(f(x,y)) = f'_x(x,y) + x \cdot f'_y(x,y).$$

Найдите жорданову форму этого оператора и укажите возможный жорданов базис.

Решение. Выпишем действие оператора на векторах базиса:

$$D(x^3) = 3x^2,\ D(x^2) = 2x,\ D(x) = 1,\ D(1) = 0,$$

$$D(x^2 y) = x^3 + 2xy,\ D(xy) = x^2 + y,\ D(y) = x.$$

Несложно убедиться, что последовательное выполнение оператора D позволяет скомпоновать несколько цепочек из базисных векторов:

$$x^3 \to 3x^2 \to 6x \to 6 \to \overline{0};$$

$$y \to x \to 1 \to \overline{0};$$

$$xy \to x^2 + y \to 3x \to 3 \to \overline{0};$$

$$x^2 y \to x^3 + 2xy \to 5x^2 + 2y \to 12x \to 12 \to \overline{0}.$$

Анализ показывает, что оператор D нильпотентный, $D^5 = 0$, $D^4 \neq 0$. У такого оператора должна быть жорданова клетка размера 5 с собственным значением нуль. Ее корневым вектором может служить вектор $f_{15}(x,y) = x^2 y$. Тогда

$$f_{14}(x,y) = Df_{15} = x^3 + 2xy,\ f_{13}(x,y) = Df_{14} = 5x^2 + 2y,$$

$$f_{12}(x,y) = Df_{13} = 12x,\ f_{11}(x,y) = Df_{12} = 12.$$

Найдем остальные клетки. Мы должны выбрать между двумя вариантами:

(1) две клетки размера 1;

(2) одна клетка размера 2.

Сравнивая $D(x^2) = 2x$ и $D(y) = x$, нетрудно убедиться, что $D(x^2 - 2y) = 0$. Попробуем подобрать к многочлену $x^2 - 2y$ присоединенный вектор. Сравнивая $D(x^3) = 3x^2$ и $D(xy) = x^2 + y$, получим, что $D(x^3 - 2xy) = x^2 - 2y$. Следовательно, мы построили клетку размера 2 с базисными векторами

$$f_{21}(x,y) = x^2 - 2y,\ f_{22}(x,y) = x^3 - 2xy.$$

Теперь надо убедиться, что выбранные нами базисные векторы обеих клеток составляют жорданов базис $f = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{21}, f_{22}\}$ в L. Для этого достаточно проверить, что векторы

$$f_{12} = 12x,\ f_{11} = 12,\ f_{22} = x^3 - 2xy,\ f_{21} = x^2 - 2y$$

высоты не выше 2 линейно независимы. Проверка показывает, что это верно, откуда набор f является жордановым базисом.

Итак, оператор D нильпотентный, его жорданова форма состоит из клетки размером 5 и клетки размером 2.

Пример 5. Приведите пример матрицы B_e нильпотентного линейного оператора B в пространстве R^5, для которого

$$KerB = L\{e_1 + e_2, e_4\},\ \operatorname{Im} B = L\{e_1 + e_3, e_4, e_1 + e_5\}.$$

Укажите жорданову форму этого оператора и матрицу перехода к жорданову базису.

Решение. Так как $\dim(KerB) = 2$, жорданова форма оператора состоит из двух клеток. Пересечение $\operatorname{Im} B \cap KerB = L\{e_4\}$ одномерное, поэтому размер больше единицы имеет только одна клетка. Значит, размеры жордановых клеток один и четыре. Действие нильпотентного оператора B в клетке размером 4 можно изобразить цепочкой

$$f_{14} \to f_{13} \to f_{12} \to f_{11} \to \overline{0}.$$

Для этой цепочки $\operatorname{Im} B \cap KerB = L\{e_4\} = L\{f_{11}\}$. Следовательно, можно положить $f_{11} = e_4$. Тогда в качестве корневого вектора клетки размером один годится, например, вектор $f_{21} = e_1 + e_2$. В клетке размера 4 базисные векторы $f_{14} \notin \operatorname{Im} B$, а $f_{12}, f_{13} \in \operatorname{Im} B$. Чтобы удовлетворить этим условиям, положим

$$f_{14} = e_5,\ f_{13} = e_1 + e_5,\ f_{12} = e_1 + e_3.$$

В результате все условия задачи будут соблюдены. Выпишем матрицу перехода к жорданову базису и жорданову нормальную форму построенного оператора:

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления матрицы B_e можно воспользоваться тремя способами. Во-первых, можно использовать формулу $B_e = T_{e\to f} B_f T_f$. Этот способ довольно громоздкий. Во-вторых, из условий

$$e_5 \to e_1 + e_5 \to e_1 + e_3 \to e_4 \to \overline{0},\ e_1 + e_2 \to \overline{0}$$

следует, что матрица B_e является решением матричного уравнения

$$B_e \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третий способ основан на анализе. Будем по определению вычислять векторы Be_k. Сразу находятся разложения $Be_5 = e_1 + e_5$, $Be_4 = \overline{0}$. Далее, так как $e_1 = f_{13} - f_{14}$, то

$$Be_1 = \mathrm{B}f_{13} - Bf_{14} = (e_1 + e_3) - (e_1 + e_5) = e_3 - e_5.$$

Из условия $B(e_1 + e_2) = \overline{0}$ выводится $Be_2 = -Be_1 = e_5 - e_3$. Наконец,

$$Be_3 = \mathrm{B}(e_1 + e_3 - e_1) = \mathrm{B}(e_1 + e_3) - \mathrm{B}e_1 = e_4 - e_3 + e_5.$$

Выпишем ответ:

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Оператор A приводится к жордановой форме с двумя клетками размерами 2 и 3 с различными собственными значениями α и β. Соответствующий жорданов базис

$$f = \{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{23}\}.$$

Укажите все инвариантные подпространства, задав их в виде линейных оболочек векторов жорданова базиса.

Решение. Подпространства

$$L_1 = L\{f_{11}, f_{12}\} \text{ и } L_2 = \{f_{21}, f_{22}, f_{23}\}$$

корневые. Любое инвариантное подпространство в V является прямой суммой двух инвариантных подпространств, содержащихся в L_1 и L_2 соответственно. В жордановой клетке размера p каждое инвариантное подпространство является линейной оболочкой $L\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ базисных векторов, где k меняется от 0 до p. Следовательно, в клетке L_1 инвариантными являются подпространства

$$\{\bar{0}\},\ N_1 = L\{f_{11}\},\ N_2 = L\{f_{11}, f_{12}\}.$$

В клетке L_2 инвариантными являются подпространства

$$\{\bar{0}\},\ K_1 = L\{f_{21}\},\ K_2 = L\{f_{21}, f_{22}\},\ K_3 = L\{f_{21}, f_{22}, f_{23}\}.$$

В результате мы получим 12 вариантов комбинаций прямых сумм:

1) $H_1 = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$; 2) $H_2 = \{\bar{0}\} \oplus K_1 = L\{f_{21}\}$;

3) $H_3 = \{\bar{0}\} \oplus K_2 = L\{f_{21}, f_{22}\}$; 4) $H_4 = \{\bar{0}\} \oplus K_3 = L\{f_{21}, f_{22}, f_{23}\}$;

5) $H_5 = N_1 \oplus \{\bar{0}\} = L\{f_{11}\}$; 6) $H_6 = N_1 \oplus K_1 = L\{f_{11}, f_{21}\}$;

7) $H_7 = N_1 \oplus K_2 = L\{f_{11}, f_{21}, f_{22}\}$; 8) $H_8 = N_1 \oplus K_3 = L\{f_{11}, f_{21}, f_{22}, f_{23}\}$;

9) $H_9 = N_2 \oplus \{\bar{0}\} = L\{f_{11}, f_{12}\}$; 10) $H_{10} = N_2 \oplus K_1 = L\{f_{11}, f_{12}, f_{21}\}$;

11) $H_{11} = N_2 \oplus K_2 = L\{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}\}$;

12) $H_{12} = N_2 \oplus K_3 = L\{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{23}\} = V$.

Пример 7. Нильпотентный оператор B приводится к жордановой форме с двумя клетками размерами 2 в жордановом базисе

$$f = \{f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}\}.$$

Укажите все инвариантные подпространства L, задав их в виде линейных оболочек векторов жорданова базиса.

Решение. Тривиальными инвариантными подпространствами являются нулевое подпространство и все пространство V. Остальные инвариантные подпространства будем описывать, исходя из их жорданова разложения.

Одномерные инвариантные подпространства – все прямые в ядре $L\{f_{11}, f_{21}\}$ оператора B, натянутые на нетривиальные линейные комбинации $a \cdot f_{11} + \beta \cdot f_{21}$. Описание таких подпространств можно задать следующим образом:

либо $L = L\{f_{11}\}$, либо $L = L\{\alpha \cdot f_{11} + f_{21}\}$, где $\alpha \in R$.

Двумерное инвариантное подпространство состоит из двух клеток размера 1 или из одной клетки размера 2. В первом случае $L = L\{f_{11}, f_{21}\}$. Во втором случае клетка однозначно определяется корневым вектором высоты 2. Вектор высоты 2 – любой вектор, не лежащий в ядре оператора B. Его можно представить в виде $a \cdot f_{12} + \beta \cdot f_{22} + x$, где $x \in Ker(B)$. Для полного описания таких подпространств используем похожий прием:

либо $L = L\{f_{12} + \beta \cdot f_{21}, f_{11}\}$,

либо $L = L\{a \cdot f_{12} + f_{22} + \beta \cdot f_{11},\ \ a \cdot f_{11} + f_{21}\}$, где $\alpha, \beta \in R$.

Трехмерное инвариантное подпространство состоит из двух клеток размерами 2 и 1. Оно обязательно содержит ядро $L\{f_{11}, f_{21}\}$ оператора B. Клетка размера 2 однозначно определяется корневым вектором высоты 2. Тогда

либо $L = L\{f_{12}, f_{11}, f_{21}\}$, либо $L = L\{a \cdot f_{12} + f_{22}, f_{11},\ f_{21}\}$, где $\alpha \in R$.

Типовые задачи

1. Линейный оператор A в пространстве R^n задан своей матрицей A_e. Найдите жорданову форму этого оператора и укажите матрицу перехода к возможному жорданову базису f.

а) $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$.

б) $A_e = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

г) $A_e = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

д) $A_e = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 1 \\ 6 & 9 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

е) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

ж) $A_e = \begin{pmatrix} 10 & -9 & 15 \\ 3 & -5 & 8 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

з) $A_e = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

и) $A_e = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -8 & 12 & -16 \\ -5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$.

к) $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 & -3 \\ 9 & -7 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

л) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

м) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

н) $A_e = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 & 4 \\ -2 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. о) $A_e = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 6 & -4 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ -6 & 6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

п) $A_e = \begin{pmatrix} -13 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & -1 & 4 & 1 \\ -15 & -1 & 3 & 9 \\ -16 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Дополнительно.

р) $A_e = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. с) $A_e = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 4 \\ -4 & -12 & 8 \\ -6 & -15 & 10 \end{pmatrix}$.

т) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. у) $A_e = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -8 & 12 \\ -3 & 1 & 4 & -4 \\ 6 & -4 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ф) $A_e = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. х) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 3 \\ -3 & -9 & -4 & 1 \\ 6 & 16 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

ц) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Оператор D действует в действительном линейном пространстве функций L. Найдите жорданову форму этого оператора и укажите соответствующий жорданов базис.

а) L – пространство многочленов степени не выше трех, D – оператор дифференцирования.

б) L – пространство функций вида $f(x) = P(x) \cdot e^x$, где $P(x)$ – многочлен степени не выше двух, D – оператор дифференцирования.

в) $L = L\{xe^x, xe^{-x}, x^2e^x, e^x, e^{-x}\}$, D – оператор дифференцирования.

Дополнительно

г) $L = L\{y^3, y^2, y, 1, xy, x\}$, $D(f(x,y)) = y^2 \cdot f'_x(x,y) + f'_y(x,y)$.

д) $L = L\{1, x, y, z, xz, xy, x^2\}$,
$D(f(x,y,z)) = f'_x(x,y,z) + x \cdot f'_y(x,y,z) + y \cdot f'_z(x,y,z)$.

3. Оператор дифференцирования D действует в комплексном линейном пространстве функций L. Найдите жорданову форму этого оператора. Укажите соответствующий жорданов базис.

а) $L = \{f(x) = P(x) \cdot \sin x + Q(x) \cdot \cos x\}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами степени не выше одного.

б) $L = \{f(x) = P(x) \cdot e^x \cdot \sin x + Q(x) \cdot e^x \cdot \cos x\}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с комплексными коэффициентами степени не выше одного.

4. Приведите пример матрицы нильпотентного линейного оператора A в R^5 в базисе $\{e_1, e_2, \ldots\}$ с заданным ядром $KerA$ и образом $\operatorname{Im} A$. Сколько клеток будет в жордановой форме этой матрицы? Какого они размера? Укажите жорданов базис в каждой клетке.

а) $KerA = L\{e_1, e_4\}$, $\operatorname{Im} A = L\{e_1 + e_4, e_2, e_5\}$;

б) $KerA = L\{e_1, e_4 + e_5\}$, $\operatorname{Im} A = L\{e_1 + e_4, e_1 - e_5, e_4 - e_5\}$;

в) $KerA = L\{e_1, e_1 + e_5\}$, $\operatorname{Im} A = L\{e_1 + e_4, e_2 - e_5, e_3 - e_5\}$.

Дополнительные задачи

5. Матрица нильпотентного оператора A в базисе $\{f_1, f_2, \ldots, f_{13}\}$ состоит из одной жордановой клетки размером 13.

а) Какие жордановы клетки в жордановой форме оператора $3A$?

б) Укажите жорданов базис для $3A$.

6. Матрица нильпотентного оператора A состоит из одной жордановой клетки размером 13. Какие жордановы клетки в жордановой форме оператора A^2?

7. Матрица нильпотентного оператора A состоит из одной жордановой клетки размером 13. Какие жордановы клетки в жордановой форме оператора $P(A) = A^2 - 3A + 2E$?

8. Характеристический многочлен оператора A равен

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^4 (\lambda + 1)^5 (\lambda - 3)^3.$$

Какова размерность подпространства $L = (Ker((A + E)^{13}))^{\perp}$?

9. Линейный оператор в пространстве R^3 в базисе f приводится к жордановой форме, в которой у него две клетки с собственным значением 2: одна размера 2 в подпространстве $L\{f_1, f_2\}$, другая размера 1 в подпростран-

стве $L\{g_1\}$). Укажите в параметрическом виде все инвариантные подпространства всех размерностей.

10. Линейный оператор в пространстве R^4 в базисе f приводится к жордановой форме, в которой у него две клетки с собственным значением λ размера 2 в подпространствах $L\{f_1, f_2\}$ и $L\{g_1, g_2\}$. Укажите в параметрическом виде все инвариантные подпространства всех размерностей.

11. Линейный оператор в базисе f приводится к жордановой форме, в которой у него одна клетка с собственным значением λ_1 размера k в подпространстве $L\{f_1, f_2, ...\}$ и одна клетка с собственным значением $\lambda_2 \neq \lambda_1$ размера m в подпространстве $L\{g_1, g_2, ...\}$. При разных k и m укажите в этом базисе в параметрическом виде все инвариантные подпространства всех размерностей.

12. Вычислите e^A.

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответы на типовые задачи

1. а) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

б) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

в) Не существует.

г) $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

д) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

е) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -9 & 5 \end{pmatrix}$.

ж) Не существует.

з) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

и) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$

к) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

л) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

м) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

н) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & -13 \\ -1 & 2 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

о) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

п) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$

р) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

с) $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 7 \\ 14 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$

т) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

у) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

ф) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

х) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

ц) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. а) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x$, $f_3(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $f_4(x)=\dfrac{x^3}{6}$.

б) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=x\cdot e^x$, $f_3(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot e^x$.

в) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $f_{11}(x)=2\cdot e^x$, $f_{12}(x)=2x\cdot e^x$,

$f_{13}(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot e^x$, $f_{21}(x)=e^{-x}$, $f_{22}(x)=x\cdot e^{-x}$.

г) Жордановы клетки размерами 5 и 1 с $\lambda=0$;

$f_{11}(x,y)=8$, $f_{12}(x,y)=8y$, $f_{13}(x,y)=4y^2$, $f_{14}(x,y)=y^3+x$,

$f_{15}(x,y)=xy$, $f_{21}(x,y)=y^3-3x$.

д) Жордановы клетки размерами 5 и 2 с $\lambda=0$;

$f_{11}(x,y,z)=4$, $f_{12}(x,y,z)=4x$, $f_{13}(x,y,z)=x^2+2y$,

$f_{14}(x,y,z)=xy+z$, $f_{15}(x,y,z)=xz$, $f_{21}(x)=x^2-2y$,

$f_{22}(x,y,z)=xy-3z$.

3. а) Две жордановы клетки размера 2 с собственными значениями i и $-i$;

$f_{11}(x)=\cos x+i\cdot\sin x$, $f_{12}(x)=x(\cos x+i\cdot\sin x)$,

$f_{21}(x)=\cos x-i\cdot\sin x$, $f_{22}(x)=x(\cos x-i\cdot\sin x)$.

б) Две жордановы клетки размера 2 с собственными значениями $1+i$ и $1-i$;

$f_{11}(x)=e^x(\cos x+i\cdot\sin x)$, $f_{12}(x)=xe^x\cdot(\cos x+i\cdot\sin x)$,

$f_{21}(x)=e^x(\cos x-i\cdot\sin x)$, $f_{22}(x)=xe^x\cdot(\cos x-i\cdot\sin x)$.

4. а) Две клетки размерами 1 и 4;

например, $L_1=L\{e_1\}$, $L_2=L\{e_1+e_4,e_2,e_5,e_3\}$.

б) Две клетки размерами 2 и 3; например, $L_1=L\{e_1,e_2\}$,

$L_2=\{e_4+e_5,e_4,e_3\}$.

в) Такого нильпотентного оператора не существует.

Ответы на дополнительные задачи

5. а) Одна клетка с собственным значением 0 размера 13.
6. Две клетки с собственным значением 0 размерами 7 и 6.
7. Одна клетка с собственным значением 2 размера 13.
8. $\dim(L) = 7$.
9. (1) Размерность 0: $\{\bar{0}\}$.
   (2) Размерность 1: либо $L\{f_1\}$, либо $L\{\alpha \cdot f_1 + g_1\}$, где $\alpha \in R$.
   (3) Размерность 2: либо $L\{f_1, g_1\}$, либо $L\{f_1,\ f_2 + \beta \cdot g_1\}$, где $\beta \in R$.
   (4) Размерность 3: R^3.
10. (1) Размерность 0: $\{\bar{0}\}$.
    (2) Размерность 1: либо $L\{f_1\}$, либо $L\{\alpha \cdot f_1 + g_1\}$, где $\alpha \in R$.
    (3) Размерность 2: либо $L\{f_1, g_1\}$, либо $L\{f_1, f_2\}$,
    либо $L\{\beta \cdot f_1 + g_1,\ \beta \cdot f_2 + g_2\}$, где $\beta \in R$.
    (4) Размерность 3: либо $L\{f_1, g_1, f_2\}$, либо $L\{f_1, g_1,\ \beta \cdot f_2 + g_2\}$, где $\beta \in R$.
    (5) Размерность 4: R^4.
11. В одной жордановой клетке размера m инвариантными подпространствами являются только подпространства вида $V_j = L\{f_1, f_2, \ldots, f_j\}$, где $0 \le j \le m$ (значение $j = 0$ соответствует подпространству $\{\bar{0}\}$). Для двух жордановых клеток с разными собственными значениями все инвариантные подпространства задаются в виде прямой суммы двух инвариантных подпространств, содержащихся в каждой из клеток.
12. а) $e^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. б) $e^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

XX. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определения и формулы

Оператор B в евклидовом пространстве V называется сопряженным к оператору A в том же пространстве, если для любых двух векторов $x \in V$, $y \in V$ выполняется тождество $(Bx, y) = (x, Ay)$. Обозначение сопряженного оператора $B = A^*$.

Для любого линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве сопряженный оператор существует и единственный. Сопряженный оператор в любом ортонормированном базисе имеет матрицу, транспонированную к матрице исходного оператора. Обратное утверждение: если матрица оператора B в ортонормированном базисе транспонирована к матрице оператора A, то B сопряжен к A.

Операция перехода к сопряженному оператору удовлетворяет соотношению двойственности: $(A^*)^* = A$.

Для произведения операторов верна формула $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Характеристические многочлены и собственные значения исходного и сопряженного операторов совпадают.

Для каждого инвариантного подпространства L линейного оператора A в евклидовом пространстве V его ортогональное дополнение $L^\perp$ является инвариантным подпространством оператора A^*.

Линейный оператор A в евклидовом пространстве называется самосопряженным (или симметрическим), если $A^* = A$.

Матрица самосопряженного оператора в любом ортонормированном базисе симметричная. Обратное утверждение: оператор, у которого матрица в некотором ортонормированном базисе симметричная, является самосопряженным оператором.

Если L – инвариантное подпространство самосопряженного оператора A, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также является инвариантным подпространством оператора A.

Собственные векторы самосопряженного оператора с различными собственными значениями ортогональны.

Для самосопряженного оператора всегда существует ортогональный базис из собственных векторов. При необходимости его можно выбрать ортонормированным. Обратное утверждение: оператор, у которого есть ортогональный базис из собственных векторов, самосопряженный.

Предположим, что скалярное произведение задано в базисе f положительно определенной матрицей Грама B (то есть $(x, y) = X_f{}^T \cdot B \cdot Y_f$). Если A_f – матрица оператора A в базисе f, то матрица в базисе f сопряженного оператора A^* задается формулой $A_f^* = B^{-1} \cdot A_f^T \cdot B$.

Назовем матрицу U ортогональной, если ее столбцы, рассматриваемые как векторы в E^n со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированный базис.

Эквивалентное определение ортогональной матрицы: $U^T \cdot U = E$.

Если базис f ортонормированный, то базис g ортонормированный тогда и только тогда, когда матрица перехода $T_{f \to g}$ ортогональная.

Оператор U называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение векторов: для любых векторов $x \in V$, $y \in V$ выполняется тождество $(Ux, Uy) = (x, y)$. Ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между ними.

Ортогональный оператор невырожденный.

Ортогональный оператор произвольный ортонормированный базис переводит в ортонормированный базис. Обратное утверждение: если линейный оператор переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный базис, то этот оператор ортогональный.

Матрица ортогонального линейного оператора в любом ортонормированном базисе ортогональная. Обратное утверждение: оператор, у которого матрица в некотором ортонормированном базисе ортогональная, ортогональный.

Модуль собственных значений ортогонального оператора, включая комплексные, равен единице. Действительные собственные значения ортогонального оператора, если они существуют, равны ± 1.

Если L – инвариантное подпространство ортогонального оператора U, то его ортогональное дополнение $L^\perp$ также является инвариантным подпространством оператора U.

Неприводимый ортогональный оператор в евклидовом пространстве размерности два является поворотом на некоторый угол $\varphi \neq \pi$. В любом ортонормированном базисе f его матрица совпадает с матрицей поворота на угол φ :

$$U_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Пространство ортогонального оператора разлагается в прямую сумму инвариантных попарно ортогональных неприводимых подпространств. При выборе соответствующего базиса в матрице ортогонального оператора клетки размера один – это числа ± 1, клетки размера два – матрицы поворота. Такое представление ортогонального оператора называется каноническим.

Любой невырожденный оператор A можно разложить в произведение $A = S \cdot U$ самосопряженного оператора S с положительными собственными значениями и ортогонального оператора U. Аналогично существует единственное разложение $A = U \cdot S$ с другим порядком сомножителей. Эти разложения называются полярными разложениями.

Как следствие, любую невырожденную матрицу A можно разложить в произведение $A = S \cdot U$ симметричной положительно определенной матрицы S и ортогональной матрицы U. Аналогично существует единственное разложение $A = U \cdot S$ с другим порядком сомножителей.

Примеры решения задач

Пример 1. Укажите пример матрицы A_e такого самосопряженного оператора $A \neq k \cdot E$ в пространстве E^2, что $Af_1 = 3f_1$, где $f_1 = (3;\ 2)$.

Решение. Самосопряженный оператор имеет ортогональный базис из собственных векторов. Один собственный вектор $f_1 = (3;\ 2)$. Тогда ортогональный вектор $f_2 = (-2;\ 3)$ тоже собственный. Положим $Af_2 = \overline{0}$. Тогда можно составить операторное равенство $G = A \cdot F$, где $Fe_1 = f_1$, $Fe_2 = f_2$, $Ge_1 = 3f_1, Ge_2 = \overline{0}$. Этим соотношениям соответствует матричное равенство

$$G_e = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = A_e \cdot F_e = A_e \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ откуда } A_e = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 27 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Укажите пример матрицы A_e невырожденного самосопряженного оператора A в пространстве E^3, для которого

$$Af_1 = 2f_1,\ Af_2 = -3f_2, \text{ где } f_1 = (1;\ 0; -1),\ f_2 = (1; -2;\ 1).$$

Решение. Собственные векторы самосопряженного оператора с разными собственными значениями ортогональны. Это необходимое условие $(f_1, f_2) = 0$ выполнено. Оператор будет самосопряженным, если у него будет ортогональный базис из собственных векторов. Третий вектор f_3, который должен быть собственным для оператора A, находится из условия $(f_3, f_1) = (f_3, f_2) = 0$. Получим $f_3 = (1;\ 1;\ 1)$. Оператор A, удовлетворяющий всем условиям, получится, если положить, например, $Af_3 = f_3$.

Для вычисления матрицы A_e можно предложить два способа. Первый способ использует стандартную формулу $A_e = T_{e\to f} A_f T_{f\to e}$. Имеем

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, T_{f\to e} = T_{e\to f}^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В результате получим

$$A_e = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 8 & -7 \\ 8 & -10 & 8 \\ -7 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Из условий

$$Af_1 = 2f_1,\ Af_2 = -3f_2,\ Af_3 = f_3$$

следует, что матрица A_e является решением матричного уравнения

$$A_e\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Укажите пример матрицы A_e такого самосопряженного оператора A в пространстве E^2, что $Af_1 = g_1$, где $f_1 = (1;\, 0)$, $g_1 = (3;\, 4)$.

Решение. Сначала проанализируем условие задачи. Пусть задан некоторый базис $f = \{f_1, f_2\}$. Для того чтобы оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы равенство $(f_j, Af_k) = (Af_j, f_k)$ выполнялось для всех j и k. Если $j = k$, то это равенство превращается в тождество. Значит, в двумерном пространстве остается одно требование $(f_1, Af_2) = (Af_1, f_2)$.

Приведенное рассуждение дает ключ к решению. Пусть $f_2 = (0;\, 1) \perp f_1$ и $g_2 = (4; -3) \perp g_1$. Тогда для базиса $\{f_1, g_2\}$ оператор будет самосопряженным тогда и только тогда, когда выполнено $(f_1, Ag_2) = (Af_1, g_2) = (g_1, g_2) = 0$. Значит, должно быть $Ag_2 = \lambda f_2$. Положим $Ag_2 = f_2$. Тогда получим матричное уравнение

$$A_e\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ откуда } A_e = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Другой способ состоит в непосредственном решении матричного уравнения $A_e f_1 = g_1$ с симметричной матрицей A_e. Получим $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, откуда

$$x = 3,\ y = 4,\ z \in R.$$

Пример 4. Скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3 задается билинейной формой с матрицей B. Проверьте корректность определения скалярного произведения и найдите матрицу оператора, сопряженного в полученном евклидовом пространстве к оператору A с матрицей A_e.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ A_e = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверка с использованием критерия Сильвестра показывает, что матрица B положительно определена. Матричная формула скалярного произведения $(x, y) = X_e^T \cdot B \cdot Y_e$. Запишем в матричном виде определение сопряжения $(x, Ay) = (A^* x, y)$:

$$X_e^T \cdot B \cdot (A_e Y_e) = \left(A_e^* X_e\right)^T \cdot B \cdot Y_e \text{ или } X_e^T \cdot B \cdot A_e \cdot Y_e = X_e^T \cdot (A_e^*)^T \cdot B \cdot Y_e.$$

Ввиду произвольности X_e и Y_e получим

$$B \cdot A_e = (A_e^*)^T \cdot B, \text{ откуда } (A_e^*)^T = B \cdot A_e \cdot B^{-1}.$$

Транспонируем обе части равенства. Так как $B^T = B$, получим формулу

$$A_e^* = B^{-1} \cdot A_e^T \cdot B.$$

Вычисления для B^{-1} и A_e^* дают

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ A_e^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -9 & 8 & -3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Может ли матрица A_e при некотором определении скалярного произведения быть матрицей самосопряженного оператора A в стандартном базисе e в R^3? Если да, то укажите матрицу B_e этого скалярного произведения.

$$A_e = \begin{pmatrix} 8 & 15 & 6 \\ -4 & -7 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для самосопряженного оператора существует ортогональный базис из собственных векторов. Следовательно, наличие базиса из собственных векторов является необходимым условием положительного решения задачи. Характеристическое уравнение для матрицы A_e имеет вид

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Собственные векторы соответственно

$$f_1 = (3;-1;-1),\ f_2 = (1;0;-1),\ f_3 = (-4;2;1).$$

Скалярное произведение должно быть таким, чтобы базис $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ был ортогональным. Пусть в базисе f матрица скалярного произведения $B_f = E$. Тогда

$$B_e = (T_{f\to e})^T \cdot B_f \cdot T_{f\to e} = (T_{f\to e})^T \cdot T_{f\to e}.$$

Вычисления для $T_{e\to f}$, $T_{f\to e}$ и B_e дают

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, T_{f\to e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 9 & 14 & 10 \\ 7 & 19 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. В двумерном евклидовом пространстве E^2 заданы два вектора $a = (2;\ 5)$ и $b = (5;-2)$. Постройте матрицы двух различных ортогональных операторов, для которых выполнено условие $U(a) = b$.

Решение. Ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между ними. Необходимое условие $|U(a)| = |a|$ в данном случае выполняется. Вектор $a = (2;\ 5)$ перпендикулярен вектору $b = (5;-2)$. Так как вектор $Aa \perp Ab$, имеем $Ab = \pm a$. Для случаев $Ab = a$ и $Ab = -a$ получим два матричных уравнения

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Их решения соответственно

$$S_e = \frac{1}{29}\cdot\begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 21 & -20 \end{pmatrix} \text{ и } U_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оператор с матрицей S_e – зеркальная симметрия относительно биссектрисы угла между векторами a и b. Оператор с матрицей U_e– поворот на 90° по часовой стрелке.

Пример 7. Приведите пример матриц в базисе e двух непропорциональных ортогональных операторов в E^2, которые переводят прямую $L = L\{a_1(1;3)\}$ в прямую $L = L\{b_1(2;-1)\}$.

Решение. Так как ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между векторами, вектор $a_1(1;3)$ должен перейти в один из векторов $\pm\sqrt{2}\cdot b_1(2;-1)$, а вектор $a_2(3;-1)$, перпендикулярный вектору a_1, должен перейти в один из двух векторов $\pm\sqrt{2}\cdot b_2(1;2)$, перпендикулярных вектору b_1. Оператор с условиями $Aa_1 = \sqrt{2}\cdot b_1$, $Aa_2 = \sqrt{2}\cdot b_2$ отличается от оператора с условиями $Aa_1 = -\sqrt{2}\cdot b_1$, $Aa_2 = -\sqrt{2}\cdot b_2$ только знаком. То же относится ко второй паре операторов. Поэтому достаточно решить два матричных уравнения:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Их решения соответственно

$$S_e = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } U_e = \frac{\sqrt{2}}{10}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор с матрицей S_e – зеркальная симметрия относительно прямой, составляющей с осью угол 22,5°. Оператор с матрицей U_e– оператор поворота на угол $\phi = \pi + \arccos(1/5\sqrt{2})$.

Пример 8. Приведите пример матрицы U_e в стандартном базисе e ортогонального оператора U в E^3, который переводит прямую $L_1 = L\{a(1;\ 2;\ 0)\}$ в прямую $L_2 = L\{b(2;-1;\ 1)\}$.

Решение. Найдем вектор нормали, перпендикулярный a и b: $n = (2;-1;-5)$. Нужный пример доставляет, например, оператор поворота вокруг оси $L_3 = L\{n\}$, который переводит прямую L_1 в прямую L_2. Воспользуемся удачным обстоятельством $(a_1,\ b_1) = 0$. Выберем ортонормированный базис

$$f_1 = \frac{a}{\sqrt{5}},\ f_2 = \frac{b}{\sqrt{6}},\ f_3 = \frac{n}{\sqrt{30}}.$$

Ортогональная матрица перехода $T_{e\to f}$ и матрица поворота на угол $\phi = 90°$ в базисе f имеют вид

$$T_{e\to f} = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & 2 \\ 2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & -5 \end{pmatrix}, U_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $T_{f\to e} = T_{e\to f}^T$, имеем

$$U_e = T_{e\to f} \cdot U_f \cdot T_{f\to e} = T_{e\to f} \cdot U_f \cdot T_{e\to f}^T =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & 2 \\ 2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 0 \\ 2\sqrt{5} & -\sqrt{5} & \sqrt{5} \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5\sqrt{30} - 2 & \sqrt{30} - 10 \\ 5\sqrt{30} - 2 & 1 & 2\sqrt{30} + 5 \\ -\sqrt{30} - 10 & -2\sqrt{30} + 5 & 25 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Подходящих операторов бесконечно много, так как наряду с оператором U годится любой ортогональный оператор вида $V \cdot U$, где V – некоторый ортогональный оператор, для которого $Vb = \pm b$ (любой поворот вокруг вектора b с возможной симметрией относительно плоскости, перпендикулярной b).

Пример 9. Линейный оператор A в пространстве V в базисе g задан матрицей A_g. Используя операцию сопряжения, разложите пространство V в прямую сумму $V = L\{f_1\} \oplus L\{f_2, f_3\}$ одномерного и двумерного подпространств, инвариантных относительно оператора A. Укажите матрицу оператора A_f в полученном базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$.

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение. Характеристическое уравнение оператора A

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda - 9\lambda + 5 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0$$

имеет единственный действительный корень $\lambda = 1$ кратности 1, которому соответствует собственный вектор $f_1 = (1;\ 1;\ 0)$. Тогда $L_1 = L\{f_1\}$.

Будем полагать, что в пространстве V определено скалярное произведение, заданное единичной матрицей в базисе g. Это означает, что базис g ортонормированный. Сопряженный оператор A^* с матрицей A_g^T также имеет единственный действительный корень $\lambda = 1$. Собственным для оператора A^* оказывается вектор $g_1 = (3; -1;\ 0)$. Согласно теории, двумерное инвариантное подпространство оператора A является ортогональным дополнением к вектору g_1. Следовательно, оно задается уравнением $L_2 : \{3x_1 - x_2 = 0$. Решив уравнение, выберем в подпространстве L_2 базис $\{f_2(1;\ 3;\ 0), f_3(0;\ 0;\ 1)\}$. Тогда $L_2 = L\{f_2, f_3\}$. Действие оператора на векторах базиса:

$$Af_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = f_2 - 2f_3,$$

$$Af_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = f_2 + 3f_3.$$

Значит, в базисе $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ матрица оператора A

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Ранее такая задача решалась с использованием комплексных собственных векторов с комплексными собственными значениями. Двумерное подпространство, очевидно, получилось то же самое, но матрица оператора в нем не является матрицей поворота.

Пример 10. Приведите в пространстве E^3 в стандартном базисе e пример матрицы самосопряженного оператора $A \neq 2E$, для которого $A^2 = 2A$, и при этом $Aa = 2a$ для $a = (1;2;1)$.

Решение. У самосопряженного оператора должен быть базис из собственных векторов. Собственные значения оператора удовлетворяют уравнению $\lambda^2 = 2\lambda$, поэтому $\lambda = 0$ или $\lambda = 2$. Так как пространство трехмерное, у одного собственного значения должна быть кратность 2. Пусть векторы f_2 и f_3 перпендикулярны вектору $f_1 = a$. Например, $f_2 = (1;-1;1)$,

$f_3=(1;0;-1)$. Все условия будут выполнены, если положить $f_1=a$, $Af_1=2f_1$, $Af_2=Af_3=\overline{0}$. Тогда матрица будет удовлетворять матричному уравнению

$$A_e\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\4&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}.$$

Его решением является матрица

$$A_e=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

Другой способ. Оператор A является удвоенным ортогональным проектором на направление вектора a. Формула ортогонального проектора $Ax=\dfrac{(x,a)}{(a,a)}\cdot a$. Получим

$$Ae_1=\frac{2(e_1,a)}{(a,a)}\cdot a=\frac{2}{6}\cdot a,\ Ae_2=\frac{2(e_2,a)}{(a,a)}\cdot a=\frac{4}{6}\cdot a,\ Ae_3=\frac{2(e_3,a)}{(a,a)}\cdot a=\frac{2}{6}\cdot a.$$

Пример 11. Представьте матрицу $A=\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}$ в виде произведения $A=S\cdot U$ положительно определенной симметричной матрицы S на ортогональную матрицу U.

Решение. Пусть такое разложение $A=SU$ существует. Тогда должно выполняться равенство

$$B_e=A\cdot A^T=(SU)\cdot(SU)^T=SU\cdot U^TS^T=S(UU^{-1})S=S^2.$$

В нашем случае

$$B_e=A\cdot A^T=\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&-30\\-30&85\end{pmatrix}=S^2.$$

Матрица $B_e=A\cdot A^T$ является матрицей Грама строк матрицы A, поэтому она симметричная и положительно определенная. Следовательно, для самосопряженного оператора в евклидовом пространстве E^2 с матрицей B_e в стандартном базисе существует базис из собственных векторов. Составим характеристическое уравнение для матрицы B_e. Оно имеет вид

$$\chi(\lambda)=\lambda^2-125\lambda+2500=0\text{, корни } \lambda_1=25 \text{ и } \lambda_2=100.$$

Стандартным способом найдем матрицы перехода к базису f из собственных векторов и обратно:

$$T_{e\to f}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix},\ T_{f\to e}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}.$$

В базисе f матрица $B_f=\begin{pmatrix}25&0\\0&100\end{pmatrix}$. Положительно определенная матрица S_f, для которой $B_f=S_f^2$, равна $S_f=\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}$. В результате

$$S=S_e=T_{e\to f}\cdot S_f\cdot T_{f\to e}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0\\0&10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\-2&9\end{pmatrix},$$

$$U=S^{-1}\cdot A=\frac{1}{50}\cdot\begin{pmatrix}9&2\\2&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}2&6\\6&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2\\-2&9\end{pmatrix}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}\right).$$

Типовые задачи

1. Приведите пример матрицы A_e в стандартном базисе e такого невырожденного самосопряженного оператора $A\neq\alpha E$ в евклидовом пространстве E^n, для которого $Af_j=\lambda_j f_j$.

а) $\lambda_1=-1,\ f_1=(1;2)$.

б) $\lambda_1=2,\ f_1=(3;-2)$.

в) $\lambda_1=1,\ f_1=(-1;\ 1;\ 2),\ \lambda_2=2,\ f_2=(-1;-2;\ 1)$.

г) $\lambda_1=-2,\ f_1=(-1;\ 1;\ 1),\ \lambda_2=-1,\ f_2=(-1;-2;\ 1)$.

д) $\lambda_1=2,\ f_1=(2;\ 1;-1),\ \lambda_2=1,\ f_2=(1;-1;\ 1)$.

Дополнительно.

е) $\lambda_1=-3,\ f_1=(5;2)$.

ж) $\lambda_1=3,\ f_1=(2;\ 2;-1),\ \lambda_2=-2,\ f_2=(1;-2;-2)$.

2. В евклидовом пространстве векторы f_1 и f_2 заданы в базисе e. Существует ли невырожденный самосопряженный оператор $A\neq\alpha E$, для которого векторы f_1 и f_2 собственные? Если существует, то укажите пример матрицы A_e такого оператора. В пункте д) укажите все такие матрицы.

а) $f_1=(1;1),\ f_2=(1;-1)$. б) $f_1=(1;2),\ f_2=(0;3)$.

в) $f_1=(2;1;-1),\ f_2=(1;-1;1)$. г) $f_1=(2;1;1),\ f_2=(1;-1;1)$.

д) $f_1=(1;1;0)$, $f_2=(1;0;1)$.

3. В евклидовом пространстве E^3 в стандартном базисе e заданы векторы f_1, f_2, g_1, g_2. Укажите пример матрицы A_e такого невырожденного самосопряженного оператора A, для которого $A(L\{f_1,f_2\})=L\{g_1,g_2\}$.

а) $f_1=(1;2;1)$, $f_2=(1;1;0)$, $g_1=(0;1;1)$, $g_2=(0;1;0)$.

б) $f_1=(1;1;1)$, $f_2=(2;-1;-1)$, $g_1=(1;0;1)$, $g_2=(-1;0;1)$.

4. Является ли самосопряженным оператор в евклидовом пространстве E^2, матрица которого в базисе $f=\{f_1,f_2\}$ равна A_f? Векторы базиса f заданы своими координатами в стандартном базисе e.

а) $f_1=(1;1)$, $f_2=(1;-1)$, $A_f=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$.

б) $f_1=(1;2)$, $f_2=(0;3)$, $A_f=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&-1\end{pmatrix}$.

в) $f_1=(1;2)$, $f_2=(0;3)$, $A_f=\begin{pmatrix}4&3\\-3&-3\end{pmatrix}$.

5. Найдите матрицу A_f^* оператора A^*, сопряженного к оператору A с матрицей A_f. Векторы базиса f заданы своими координатами в стандартном базисе e.

а) $f_1=(1;1)$, $f_2=(-1;2)$, $A_f=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$.

б) $f_1=(1;2)$, $f_2=(0;3)$, $A_f=\begin{pmatrix}1&-3\\3&-3\end{pmatrix}$.

6. Выберите из двух матриц B_1 и B_2 ту, которая может задавать скалярное произведение в стандартном базисе e пространства R^3. Найдите матрицу оператора, сопряженного в полученном евклидовом пространстве к оператору A с матрицей A_e.

а) $B_1=\begin{pmatrix}5&-2&1\\-2&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&5&1\\2&1&4\end{pmatrix}$, $A_e=\begin{pmatrix}3&-2&0\\1&-1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

б) $B_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-2\\1&-2&5\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&5&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, $A_e=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

в) $B_1=\begin{pmatrix}3&2&3\\2&5&2\\3&2&1\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&5\end{pmatrix}$, $A_e=\begin{pmatrix}2&3&0\\-1&1&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}$.

г) $B_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&2\\3&2&3\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}5&-1&2\\-1&4&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$, $A_e=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&1&3\\1&1&-2\end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A в пространстве R^3 задан своей матрицей A_e в стандартном базисе e. Можно ли так задать скалярное произведение в этом пространстве, чтобы в полученном евклидовом пространстве оператор A был самосопряженным? Если такое возможно, то напишите в базисе e матрицу этого скалярного произведения.

а) $A_e=\begin{pmatrix}5&-6&12\\-2&3&-5\\-2&4&-6\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}3&-5&13\\-2&3&-8\\0&3&-4\end{pmatrix}$.

в) $A_e=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\1&-3&0\\-1&1&-4\end{pmatrix}$. г) $A_e=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&2&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$.

д) $A_e=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&2&0\\-1&1&2\end{pmatrix}$.

Дополнительно.

е) $A_e=\begin{pmatrix}3&-2&0\\0&1&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$. ж) $A_e=\begin{pmatrix}-3&-6&-7\\6&11&12\\-4&-6&-6\end{pmatrix}$.

8. Линейный оператор A в пространстве E^3 задан матрицей A_e в стандартном базисе e. Используя свойства сопряженных операторов, разложите пространство E^3 в прямую сумму одномерного и двумерного инвариантных подпространств $L_1=L\{f_1\}$ и $L_2=L\{f_2,f_3\}$. Укажите $T_{e\to f}$ и матрицу A_f в базисе f.

а) $A_e=\begin{pmatrix}0&-2&2\\-1&6&-4\\-2&8&-6\end{pmatrix}$. б) $A_e=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-3&-3&2\\-4&-6&5\end{pmatrix}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. г) $A_e = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

9. У оператора A в пространстве E^3 есть базис f, состоящий из собственных векторов с попарно различными собственными значениями. Укажите базис g, для которого $(A^*)_g = A_f$.

а) $f = \{f_1(3;-1;\ 2), f_2 = (1;\ 2;\ 1), f_3 = (1;\ 1;\ 2)\}$.

б) $f = \{f_1(1;-1;\ 2), f_2 = (-1;\ 4;\ 2), f_3 = (1;\ 0;\ 2)\}$.

10. В евклидовом пространстве E^2 векторы f_1 и f_2 заданы своими координатами в стандартном базисе e. Является ли ортогональным оператор A, матрица которого в базисе $f = \{f_1, f_2\}$ равна A_f?

а) $f_1 = (1;1),\ f_2 = (1;-1),\ A_f = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

б) $f_1 = (1;2),\ f_2 = (0;3),\ A_f = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

в) $f_1 = (1;2),\ f_2 = (0;3),\ A_f = \begin{pmatrix} -1 & -12/5 \\ 4/3 & 11/5 \end{pmatrix}$.

г) $f_1 = (2;-3),\ f_2 = (1;1),\ A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2/13 \\ 1 & 11/13 \end{pmatrix}$.

11. Существует ли в E^2 ортогональный оператор U, для которого $Uf = g$? Векторы f и g заданы в стандартном базисе e. Если существует, то укажите матрицы U_e всех таких ортогональных операторов.

а) $f = (1;1),\ g = (1;-1)$. б) $f = (1;2),\ g = (0;3)$.

в) $f = (3;4),\ g = (0;5)$.

12. В пространстве E^3 все векторы заданы своими координатами в стандартном базисе e. Оператор U является оператором поворота относительно прямой L на угол ϕ (в какую-нибудь сторону). Укажите матрицу U_e в базисе e.

а) $\phi = 90^\circ$, $L = \{(2;1;-2)\}$. б) $\phi = 45^\circ$, $L = L\{(1;-2;-2)\}$.

в) $\phi = 120^\circ$, $L = L\{(2;-2;-1)\}$. г) $\phi = 120^\circ$, $L = L\{(1;-1;-2)\}$.

д) $\phi = \arccos(-4/5)$, $L\{(1;-2;2)\}$.

13. Существует ли в E^3 ортогональный оператор U, для которого $Uf_1 = g_1, Uf_2 = g_2$? Векторы f_j и g_j заданы в стандартном базисе e.

а) $f_1\ (2;-1;\ 2)$, $g_1\ (1;\ 2;-2)$, $f_2\ (0;\ 1;\ 3)$, $g_2\ (3;\ 0;-1)$.

б) $f_1\ (2;-1;\ 2)$, $g_1\ (1;\ 2;-2)$, $f_2\ (0;\ 1;\ 3)$, $g_2\ (0;\ 3;-1)$.

в) $f_1\ (2;-1;\ 3)$, $g_1\ (-3;\ 1;\ 2)$, $f_2\ (0;\ 2;\ 1)$, $g_2\ (1;\ 0;\ 2)$.

г) $f_1\ (-1;\ 2;\ 2)$, $g_1\ (2;-2;\ 1)$, $f_2\ (1;\ 3;\ 0)$, $g_2\ (0;-1;\ 3)$.

14. В пространстве E^n векторы f_1 и f_2 заданы своими координатами в стандартном базисе e. Существует ли ортогональный оператор $A \neq \alpha E$, для которого векторы f_1 и f_2 – собственные? Если существует, то укажите матрицы A_e всех таких ортогональных операторов.

а) $f_1 = (1;1)$, $f_2 = (1;-1)$. б) $f_1 = (1;2)$, $f_2 = (0;3)$.

в) $f_1 = (2;1;1)$, $f_2 = (1;-1;1)$. г) $f_1 = (2;1;-1)$, $f_2 = (1;-1;1)$.

15. Приведите пример матрицы в базисе e ортогонального оператора в E^3, который переводит прямую $L_1 = L\{a\}$ в прямую $L_2 = L\{b\}$.

а) $a(0;\ 1;\ 1)$, $b(1;-1;-2)$. б) $a(1;\ 0;\ 1)$, $b(1;-1;\ 2)$.

в) $a(-1;\ 1;\ 0)$, $b(2;\ 1;-1)$.

16. Приведите пример матриц в базисе e двух непропорциональных ортогональных операторов в E^2, которые переводят прямую $L_1 = L\{a\}$ в прямую $L_2 = L\{b\}$.

а) $L_1 = L\{a(1;-5)\}$, $L_2 = L\{b(2;-3)\}$. б) $L_1 = L\{a(1;1)\}$, $L_2 = L\{b(3;-1)\}$.

в) $L_1 = L\{a(2;3)\}$, $L_2 = L\{b(-5;1)\}$. г) $L_1 = L\{a(1;3)\}$, $L_2 = L\{b(1;-1)\}$.

17. Существует ли в E^3 ортогональный оператор U, который переводит прямую $L_1 = L\{a_1\}$ в прямую $L_3 = L\{b_1\}$, а прямую $L_2 = L\{a_2\}$ в прямую $L_4 = L\{b_2\}$? Если да, то укажите его матрицу U_e в стандартном базисе e.

а) $a_1(2;\ 1;\ 0)$, $b_1(3;\ 0;-1)$, $a_2(7;\ 1;\ 0)$, $b_2(4;\ 0;-3)$.

б) $a_1\ (2;-1;\ 2)$, $b_1\ (2;\ 2;-1)$, $a_2\ (0;\ 1;\ 3)$, $b_2\ (3\ ;-1;\ 0)$.

в) $a_1(-1;\ 1;\ 1)$, $b_1(1;-1;-2)$, $a_2(1;\ 1;\ 0)$, $b_2(1;-1;\ 1)$.

18. Ортогональный оператор в E^n задан своей матрицей в стандартном базисе e. Укажите канонический вид матрицы этого ортогонального оператора и соответствующий канонический ортонормированный базис.

а) $A_e = \dfrac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \dfrac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. г) $A_e = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 4/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$.

д) $U_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

19. Линейный оператор A в пространстве R^3 задан матрицей A_e в стандартном базисе e. Можно ли так задать скалярное произведение в этом пространстве, чтобы в полученном евклидовом пространстве оператор A был ортогональным? Если такое возможно, то укажите матрицу Грама этого скалярного произведения в базисе e.

а) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

в) $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. г) $A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

20. Представьте матрицу A в виде произведения $A = S \cdot U$ положительно определенной симметричной матрицы S на ортогональную матрицу U.

а) $A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. б) $A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. г) $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Представьте матрицу A в виде произведения $A = U \cdot S$ ортогональной матрицы U на положительно определенную симметричную матрицу S.

а) $A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 14 & 26 \end{pmatrix}$. г) $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Дополнительные задачи

22. В евклидовом пространстве E^3 в стандартном базисе e подпространство L задано уравнением $L : \{x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Приведите пример ортогонального оператора U, для которого подпространство L было бы инвариантным.

23. В пространстве E^3 все векторы заданы своими координатами в стандартном базисе e. Существует ли ортогональный оператор U, для которого $Ua = b$, где $a(3; 2; 2)$, $b(4; 0; 1)$, а подпространство $L = L\{b_1(1; 1; 2), b_2(2; -1; 1)\}$ инвариантное? Если да, то приведите пример матрицы U_e.

24. Известно, что для квадратных матриц выполнено равенство $AB = C$ и при этом матрицы B и C ортогональные. Можно ли утверждать, что матрица A тоже ортогональная?

25. Известно, что для квадратных матриц выполнено равенство $AB = C$ и при этом матрицы B и C невырожденные симметрические. Можно ли утверждать, что матрица A тоже симметрическая?

26. Докажите, что если определитель матрицы ортогонального оператора в пятимерном пространстве положителен, то у него существует собственный вектор с собственным значением 1.

27. Существует ли в R^2 самосопряженный ортогональный нескалярный оператор? Если нет, обоснуйте, если да, приведите пример.

Ответы на типовые задачи

1. а) Например, $A_e = -\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

б) Например, $A_e = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix} 22 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$.

в) Не существует.

г) Например, $A_e = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

д) Например, $A_e = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

е) Например, $A_e = \frac{1}{29}\cdot\begin{pmatrix} -71 & -40 \\ -40 & 13 \end{pmatrix}$.

ж) Например, $A_e = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 14 & 2 \\ 14 & 5 & -16 \\ 2 & -16 & -1 \end{pmatrix}$.

2. а) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. б) Не существует.

в) Например, $A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

г) Например, $A_e = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

д) $A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \alpha-\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & 2\alpha+\beta & -\alpha+\beta \\ \alpha-\beta & -\alpha+\beta & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq \beta$.

3. а) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   б) Например, $A_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ или $A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. а) Является. б) Не является. в) Является.

5. а) $A_e = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 53 \\ 13 & 38 \end{pmatrix}$. б) $A_e = \begin{pmatrix} 45 & 63 \\ -101/3 & -47 \end{pmatrix}$.

6. а) Матрица B_1, $A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -9 & -6 & 5 \\ -6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$.

   б) Матрица B_1, $A_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 15 & -24 \\ -3 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 19 \end{pmatrix}$.

   в) Матрица B_2, $A_e = \begin{pmatrix} 49 & -52 & 107 \\ 6 & -6 & 13 \\ -19 & 19 & -42 \end{pmatrix}$.

   г) Матрица B_2, $A_e = \begin{pmatrix} 8 & -26 & 8 \\ -5 & 11 & -4 \\ -21 & 68 & -21 \end{pmatrix}$.

7. а) Например, $B_e = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. б) Например, $B_e = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 11 \end{pmatrix}$.

в) Не может. г) Не может.

д) Например, $B_e = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. е) Например, $B_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ж) Например, $B_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$.

8. а) Например, $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

б) Например, $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

в) Например, $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

г) Например, $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. а) $g = \{g_1(3;-1;-1),\ g_2 = (1;\ 1;-1),\ g_3 = (-5;-1;\ 7)\}$.

б) $g = \{f_1(2;\ 1;-1),\ g_2 = (2;\ 0;-1),\ g_3 = (10;\ 4;-3)\}$.

10. а) Является. б) Не является. в) Является. г) Является.

11. а) $U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $U_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Не существует.

в) $U_e = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ или $U_e = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

12. а) Например, $U_e = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -4 & -7 \\ 8 & 1 & 4 \\ -1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

б) Например, $U_e = \frac{1}{9\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}+8 & -2\sqrt{2}+8 & -2\sqrt{2}-4 \\ -2\sqrt{2}-4 & 4\sqrt{2}+5 & 4\sqrt{2}-7 \\ -2\sqrt{2}+8 & 4\sqrt{2}-1 & 4\sqrt{2}+5 \end{pmatrix}$.

в) Например, $U_e = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}-4 & 2\sqrt{3}-2 \\ \sqrt{3}-4 & 1 & 2\sqrt{3}+2 \\ -2\sqrt{3}-2 & -2\sqrt{3}+2 & -2 \end{pmatrix}$.

г) Например, $U_e = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-2 \\ -2\sqrt{2}-1 & -1 & -\sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 & 2 \end{pmatrix}$.

д) $U_e = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ или $U_e = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

13. а) Например, $U_e = \frac{1}{65}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 39 & 52 \\ 65 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & -39 \end{pmatrix}$.

б) Не существует.

в) Например, $U_e = \frac{1}{69}\cdot\begin{pmatrix} -18 & 54 & -39 \\ 66 & 9 & -18 \\ 9 & 42 & 54 \end{pmatrix}$.

г) Например, $U_e = \frac{1}{65}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 65 \\ 52 & -39 & 0 \\ 39 & 52 & 0 \end{pmatrix}$.

14. а) $U_e = \pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. б) Не существует.

в) $U_e = \pm\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & -3 \\ 6 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. г) $U_e = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$U_e = \pm\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ или $U_e = \pm\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

15. а) Например, $U_e = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ -2 & -\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

б) Например, $U_e = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 2 & -\sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & -2 & -\sqrt{3}-1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

в) Например, $U_e = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 & -2 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 2 \end{pmatrix}$.

16. а) $U_1 = \frac{1}{13\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 17 & -7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $U_1 = \frac{1}{13\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -7 & -17 \\ 17 & -7 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. а) Например, $U_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

б) Не существует.

в) Например, $U_e = \dfrac{1}{6\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 6\sqrt{2}-\sqrt{3}+6 & 3\sqrt{3}+6 & 6\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ 6\sqrt{2}+\sqrt{3}-6 & -3\sqrt{3}-6 & 6\sqrt{2}-2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}+6 & -6\sqrt{3}+6 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

18. а) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f = \left\{ f_1\left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right), f_2\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{5}\right) \right\}$.

б) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \{ f_1(0;1;0), f_2(1;0;1), f_3(0;0;1) \}$.

в) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$f_1(0;\ 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$, $f_2(1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$, $f_3(-2/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6};\ 1/\sqrt{6})$.

г) $A_f = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$,

$f = \{ f_1(1;0;0;0), f_2(0;0;1;\ 0), f_3(0;1;0;0), f_4(0;0;0;1) \}$.

д) $U_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$f_1(1/\sqrt{3}; -1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$, $f_2(1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2};\ 0)$, $f_3(1/\sqrt{6}; -1/\sqrt{6}; -2/\sqrt{6})$.

19. а) Нельзя. б) Например, $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

в) Нельзя. г) Например, $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20. а) $S = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$, $U = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $S = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, U = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$

в) $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

г) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

21. а) $U = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$

б) $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

в) $U = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

г) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, U = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Ответы на дополнительные задачи

22. Например, $U_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

23. Например, $U_e = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

24. Можно.
25. В общем случае этого утверждать нельзя.

XXI. БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определения и формулы

Между линейными операторами и билинейными формами в евклидовом пространстве V существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой $B(x, y) = (x, Ay)$.

Билинейная форма $B(x,y)$ симметричная тогда и только тогда, когда оператор A самосопряженный.

Для каждой симметричной билинейной формы $B(x, y)$ в евклидовом пространстве, заданной матрицей B в ортонормированном базисе f, существует ортонормированный канонический базис g, в котором матрица билинейной формы диагональная. Ее диагональными элементами служат собственные значения симметричной матрицы B. Матрица перехода $T_{f \to g}$ ортогональная.

Две симметричные матрицы могут быть матрицами одной и той же квадратичной формы в двух ортонормированных базисах тогда и только тогда, когда их характеристические многочлены совпадают.

След матрицы билинейной формы и ее определитель одинаковы у матриц симметричной билинейной формы во всех ортонормированных базисах.

Симметричная билинейная форма положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда все собственные значения соответствующего самосопряженного оператора положительные (отрицательные).

Пусть заданы две симметричные билинейные формы $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ в линейном пространстве без скалярного произведения, причем форма $B_1(x, y)$ положительно определена. Тогда существует такой базис f, в котором матрица $B_{1f} = E$, а матрица B_{2f} диагональная.

Как следствие, если заданы две симметричные матрицы B_1 и B_2, причем матрица B_1 положительно определена, то существует такая матрица T, что $T^T B_1 T = E$, а матрица $T^T B_2 T$ диагональная.

Примеры решения задач

Пример 1. Квадратичную форму $Q(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2$ приведите ортогональным преобразованием к каноническому виду. Выпишите матрицу перехода к новому базису. Выразите новые координаты через старые и старые через новые.

Решение. Следует рассмотреть самосопряженный оператор A с матрицей

$$A_e = Q_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Его собственные значения равны $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 4$. Соответствующие собственные векторы $f_1 = (1; -2)$ и $f_2 = (2; 1)$. Собственные векторы самосопряженного оператора с разными собственными значениями ортогональные. Базис из собственных векторов сделаем ортонормированным. Для этого нормируем векторы f_1 и f_2 так, чтобы их длины стали равны единице:

$$g_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\ g_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Соответствующая матрица перехода

$$U = T_{e\to g} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

будет ортогональной, то есть $U^T = U^{-1}$. Из условия $A_e = B_e$ следует

$$B_g = U^T \cdot B_e \cdot U = U^{-1} \cdot A_e \cdot U = A_g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Значит, в базисе g квадратичная форма будет иметь канонический вид

$$Q(y) = -y_1^2 + 4y_2^2.$$

Старые координаты выражаются через новые формулой

$$X_e = T_{e\to g} \cdot Y_g = U \cdot Y_g = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot Y_g.$$

Новые координаты выражаются через старые формулой

$$Y_g = T_{e\to g}^{-1} \cdot X_e = U^T \cdot X_e = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X_e.$$

Пример 2. Квадратичную форму

$$Q(x) = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

приведите ортогональным преобразованием к каноническому виду. Выразите новые координаты через старые и старые через новые.

Решение. Рассмотрим самосопряженный оператор A с той же матрицей

$$A_e = Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение $\chi(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda = 0$, собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -6$. Соответствующие собственные векторы составляют ортогональный базис:

$$f_1 = (-1;\ 0;\ 1),\ f_2 = (2;\ 1;\ 2),\ f_3 = (1;\ -4;\ 1).$$

Нормируем базисные векторы так, чтобы их длины стали равны единице:

$$g_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right),$$

$$g_3 = \frac{f_3}{|f_3|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\ -\frac{4}{3\sqrt{2}};\ \frac{1}{3\sqrt{2}}\right).$$

Соответствующая матрица перехода ортогональная (то есть $U^T = U^{-1}$) :

$$U = T_{e\to g} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -4 \\ -3 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе g верно $A_e = B_e$, то есть квадратичная форма будет иметь канонический вид $Q(y) = 3y_2^2 - 6y_3^2$. Согласно общей формуле

$$X_e = T_{e\to g} \cdot Y_g = U \cdot Y_g,\ Y_g = T^{-1}_{e\to g} \cdot X_e = U^T \cdot X_e.$$

Пример 3. Квадратичную форму

$$Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

приведите ортогональным преобразованием к каноническому виду. Выразите старые координаты через новые.

Решение. Рассмотрим самосопряженный оператор A с матрицей

$$A_e = Q_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Его характеристическое уравнение

$$\chi(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0,$$

корни $\lambda_1 = 5$ (кратности 1) и $\lambda = -1$ (кратности 2).

Собственный вектор для $\lambda_1 = 5$ равен $f_1 = (1;\ 1;\ 1)$.

Для $\lambda_2 = -1$ собственные векторы являются решениями уравнения $\{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Для нашей задачи особенность собственного значения, кратность которого больше единицы, в том, что ФНР данного уравнения надо выбирать из двух ортогональных векторов.

Положим $f_2 = (1;\ -1;\ 0)$. Тогда третий вектор будет решением СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad = 0 \end{cases},\ \text{откуда } f_3 = (1;\ 1;\ -2).$$

Нормируем базисные векторы:

$$g_1 = \frac{f_1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ g_2 = \frac{f_2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right),$$

$$g_3 = \frac{f_3}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Соответствующая матрица перехода ортогональная:

$$T_{e\to g} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В ортонормированном базисе g верно $A_g = B_g$, поэтому канонический вид квадратичной формы $Q(y) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. Выражение старых координат через новые следует из формулы $X_e = T_{e\to g} \cdot Y_g$:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot y_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot y_3,$$

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot y_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot y_3.$$

Пример 4. Квадратичная форма $Q(x)$ задана своей матрицей в стандартном ортонормированном базисе $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$:

$$B_e = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором матрица квадратичной формы имеет диагональный вид. Укажите матрицу перехода к этому базису.

Решение. Рассмотрим самосопряженный оператор A с матрицей $A_e = B_e$. Анализ матрицы показывает, что векторы Ae_1 и Ae_2 выражаются через e_1 и e_2, векторы Ae_3 и Ae_4 выражаются через e_3 и e_4, векторы Ae_5 и Ae_6 выражаются через e_5 и e_6. Значит, пространство E^6 разлагается в сумму трех инвариантных двумерных подпространств

$$L\{e_1,e_2\},\ L\{e_3,e_4\} \text{ и } L\{e_5,e_6\},$$

которые являются попарно ортогональными. Из этого вытекает, что в каждом из трех подпространств надо найти пару ортогональных собственных векторов.

Задача свелась к трем задачам, разобранным в Примере 1:

(1) для клетки $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$, а ортогональная матрица перехода $U_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) для клетки $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ собственные значения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$, ортогональная матрица перехода $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

(3) для клетки $B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ собственные значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, ортогональная матрица перехода $U_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

В итоге канонический вид квадратичной формы

$$Q(y) = -y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2 - 2y_4^2 + 0 \cdot y_5^2 - 2y_6^2.$$

Ортогональную матрицу перехода удобно изобразить в виде трехмерной блочной матрицы третьего порядка:

$$T_{e \to f} = U = \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{U}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{U}_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Покажите, что матрицы $A = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ могут задавать одну квадратичную форму в двух разных ортонормированных базисах, и укажите матрицу перехода между этими базисами.

Решение. Две симметричные матрицы могут быть матрицами одной и той же квадратичной формы в двух ортонормированных базисах тогда и только тогда, когда их характеристические многочлены совпадают. Это условие выполняется: характеристические многочлены обеих матриц равны

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 18\lambda + 56.$$

Собственные значения обеих матриц $\lambda_1 = 14$ и $\lambda_2 = 4$.

Наметим алгоритм построения матрицы перехода. Пусть A и B – матрицы квадратичной формы в базисах e и f. В некотором базисе g ее матрица имеет диагональный вид $C = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем ортогональные матрицы перехода от базисов e и f к базису g (по образцу Примера 1). Получим $T_{e\to g} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{f\to g} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда матрица перехода от базиса e к базису f тоже ортогональная:

$$T_{e\to f} = T_{e\to g} T_{g\to f} = T_{e\to g} T_{f\to g}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. В пространстве R^2 заданы две квадратичные формы

$$Q_1(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 \text{ и } Q_2(x) = -2x_1^2 + 16x_1x_2 + 8x_2^2.$$

Найдите замену переменных, после которой обе формы одновременно приводятся к диагональному виду.

Решение. Обозначим исходный канонический базис через e. Проверка показывает, что квадратичная форма $Q_1(x)$ положительно определена:

$$Q_1(x) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (2x_1)^2 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

Следовательно, можно задать скалярное произведение в базисе e матрицей

$$B = Q_{1e} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выполним замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = \dfrac{2y_1}{4} \\ x_2 = \dfrac{y_1 - 2y_2}{4} \end{cases}, \ T_{e\to f} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Этой замене соответствует базис $f = \{f_1(1/2;\ 1/4), f_2(0; -1/2)\}$. В базисе f выражение для первой формы $Q_1(y) = y_1^2 + y_2^2$. Это означает, что базис f

ортонормированный. Квадратичная форма $Q_2(x)$ в базисе f записывается выражением

$$Q_2(y) = \frac{-2y_1^2}{4} + \frac{16y_1(y_1 - 2y_2)}{8} + \frac{8(y_1 - 2y_2)^2}{16} = 2y_1^2 - 6y_1y_2 + 2y_2^2.$$

Согласно теории, существует ортонормированный базис g, в котором форма $Q_2(y)$ приводится к диагональному виду. В этом ортонормированном базисе матрица формы Q_1 будет единичной. Матрица перехода $T_{f\to g}$ будет ортогональной.

Для построения $T_{f\to g}$ найдем собственные значения и собственные векторы (с координатами в базисе f) вспомогательного самосопряженного оператора с матрицей $A_f = Q_{2f} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Собственные значения $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$. Собственные векторы (с учетом нормировки)

$$g_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

В базисе g имеем

$$Q_1 = z_1^2 + z_2^2,\ Q_2 = 5z_1^2 - z_2^2.$$

Ортогональная матрица перехода от базиса f к базису g равна

$$T_{f\to g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно матрица перехода от базиса e к базису g равна

$$T_{e\to g} = T_{e\to f} T_{f\to g} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замена переменных определяется формулой $X_e = T_{e\to g} \cdot Z_g$, то есть

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2\sqrt{2}},\ \ x_2 = \frac{3z_1 - z_2}{4\sqrt{2}}.$$

Типовые задачи

1. Квадратичную форму $Q(x)$ приведите к каноническому виду ортогональным преобразованием. Запишите выражение новых координат через старые и старых координат через новые.

а) $Q(x) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

б) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$.

в) $Q(x) = -3x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3$.

г) $Q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Дополнительно.

д) $Q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

е) $Q(x) = 8x_1^2 + 11x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

2. Заданы четыре матрицы A, B, C и D. Укажите наборы из тех матриц, которые могут задавать одну квадратичную форму:

(1) в двух разных базисах;

(2) в двух разных ортонормированных базисах.

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -9 \\ 6 & 9 & -6 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 17 & -3 & -9 \\ -3 & -2 & 2 \\ -9 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ -4 & 19 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Заданы три матрицы A, B и C. Укажите все такие пары матриц, которые могут задавать одну квадратичную форму в двух разных ортонормированных базисах, указав матрицу перехода между соответствующими базисами.

а) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 17 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Одновременно приведите к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием координат две квадратичные формы. Запишите канонический вид квадратичных форм и матрицу перехода к каноническому базису.

а) $Q_1 = 8x_1^2 - 15x_2^2 + 8x_1x_2,\ Q_2 = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2.$

б) $Q_1 = 4x_1^2 - 35x_2^2 + 8x_1x_2,\ Q_2 = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2.$

в) $Q_1 = x_1^2 + 17x_2^2 - 8x_1x_2,\ Q_2 = 5x_1^2 - 18x_2^2 - 16x_1x_2.$

г) $Q_1 = 17x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2,\ Q_2 = -55x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_1x_2.$

Ответы на типовые задачи

1. а) $Q(y) = -3y_1^2 - 5y_2^2 + y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

б) $Q(y) = y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

в) $Q(y) = 7y_1^2 - 7y_2^2 - 7y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} & 4/\sqrt{42} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & 5/\sqrt{42} & -1/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{14} & 1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{42}} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} & 4 & \sqrt{14} \\ \sqrt{3} & 5 & -\sqrt{14} \\ 3\sqrt{3} & 1 & \sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

г) $Q(y) = -y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

д) $Q(y) = 3y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

е) $Q(y) = 6y_1^2 + 12y_2^2 + 12y_3^2,$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. а) (1) A, C и D; (2) A и C.
   б) (1) A, B и D; (2) B и D.
   в) (1) A, B, C и D; (2) A и D, B и C.
   г) (1) A, C и D; (2) A и D.

3. а) A и B, $T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   б) A и C, $T_{e\to f} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

   в) A и B, $T_{e\to f} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$;

   A и C, $T_{e\to f} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

   B и C, $T_{e\to f} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

   г) A и B, $T_{e\to f} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. а) $Q_1(y) = 17y_1^2 - 8y_2^2$, $Q_2(y) = y_1^2 + y_2^2$, $T_{e\to g} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

   б) $Q_1(y) = 13y_1^2 - 12y_2^2$, $Q_2(y) = y_1^2 + y_2^2$, $T_{e\to g} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

   в) $Q_1(y) = y_1^2 + y_2^2$, $Q_2(y) = 14y_1^2 - 11y_2^2$, $T_{e\to g} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

   г) $Q_1(y) = y_1^2 + y_2^2$, $Q_2(y) = 18y_1^2 - 7y_2^2$, $T_{e\to g} = \dfrac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 19 & -8 \end{pmatrix}$.

Научное электронное издание

ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Часть 2

ISBN 978-5-906932-83-9

9 785906 932839