ПРОГРАММА

аттестационного испытания для перевода на экономический факультет
из других вузов и с других факультетов МГУ имени М.В.Ломоносова

ЧАСТЬ II. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача максимизации прибыли фирмы. Примеры производственных функций. Обзор основных положений теории функции одной и нескольких переменных. Производная функции одной переменной. Ее геометрическая интерпретация и ее свойства. Производная сложной и обратной функции. Понятие эластичности. Понятие множества (линии) уровня функции двух переменных. Карта множеств уровней функции двух переменных. Частные производные функции двух (нескольких) переменных и их геометрическая интерпретация. Градиент и его геометрическая интерпретация. Взаимное расположение линии уровня функции двух переменных и ее градиента. Экономические примеры (функции спроса и предложения, производственная функция, функция полезности, функция издержек, линия безразличия, изокванта, изокоста). Производная векторной функции скалярного аргумента. Производная неявной функции. Понятие об экстремуме функции одной переменной. Абсолютный и условный экстремумы функции двух (нескольких) переменных и их использование для решения экономических задач.

ТЕМА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И ОТОБРАЖЕНИЙ (ФУНКЦИЙ)

Понятие множества и подмножества. Пустое множество. Множество всех подмножеств множества. Операции над множествами. Декартово произведение (прямое произведение) множеств. Отношение, бинарное отношение. Соответствие. Взаимно однозначное соответствие. Эквивалентные множества, счетные и несчетные множества. Примеры. Понятие отображения (функции), его области определения и области значений. Неподвижная точка отображения. Обратимое и обратное отображения. Композиция отображений. Примеры отображений (скалярные и векторные функции одной и нескольких переменных, точечно-множественные отображения и их геометрическая интерпретация). Использование частного квантора и квантора общности.

ТЕМА 3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ МНОЖЕСТВА

Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой, эквивалентность этих множеств. Свойства действительных чисел. Свойство непрерывности. Множество действительных чисел (точечное множество на числовой прямой). Понятия ε-окрестности действительного числа (точки), ε-окрестности с выколотым центром. Понятия внутренней точки точечного множества на числовой прямой и открытого множества. Понятия граничной точки точечного множества на числовой прямой, границы и замкнутого множества. Взаимосвязь между открытыми и замкнутыми множествами на числовой прямой. Понятия предельной и изолированной точки точечного множества на числовой прямой. Производное множество, замыкание множества. Множества плотные в себе, совершенные и замкнутые. Множество мажорант и минорант множества действительных чисел. Ограниченные (сверху, снизу) и неограниченные (сверху, снизу) множества. Наибольший (наименьший) элемент множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Рабочее определение верхней (нижней) грани. Теорема о существовании верхней (нижней) грани множества, ограниченного сверху (снизу).

ТЕМА 4. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие функции натурального аргумента (числовой последовательности), предела последовательности. Единственность предела последовательности. Примеры сходящихся и расходящихся последовательностей. Понятие бесконечно малой последовательности. Связь понятий предела и бесконечно малой. Бесконечно большие последовательности, их связь с бесконечно малыми. Теорема о сравнении бесконечно малых последовательностей. Теорема о сумме бесконечно малых последовательностей. Понятие ограниченной последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности. Теорема о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную, следствия из нее. Лемма об устойчивости знака (слабый и сильный варианты). Пределы последовательностей $\sqrt[n]{n}$, $n^k q^n$, $a^n/n!$. Теорема о пределе суммы, произведения, отношения двух последовательностей. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах. Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Примеры применения, доказательство сходимости последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Понятие о числе «$e$». Лемма о стягивающихся отрезках. Понятие предельной точки (частичного предела) последовательности. Лемма о предельной точке и теорема Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности.

Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности.

ТЕМА 5. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Понятие предела функции. Конечный и бесконечный предел функции одной переменной (по Коши, по Гейне, односторонние и двусторонние пределы). Различные варианты пределов. Единственность предела. Бесконечно большие функции. Бесконечно малые функции. Связь понятий предела и бесконечно малой. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями. Теорема сравнения бесконечно малых. Теорема о сумме бесконечно малых функций. Ограниченные функции, локально ограниченные функции. Локальная ограниченность функции, имеющей предел. Теорема о произведении бесконечно малой функции на локально ограниченную: следствия из неё. Лемма об устойчивости знака функции (слабый и сильный варианты). Предел суммы, произведения, отношения двух функций. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах. Теорема «о двух милиционерах». Теоремы о предельном переходе в сложной функции. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

Эквивалентные функции. Теорема о замене функций на эквивалентные в произведении и отношении (при вычислении пределов). Символ o-малое, его свойства. Необходимое и достаточное условие эквивалентности двух функций. Использование символа o-малое при вычислении пределов. Понятие о правиле Лопиталя вычисления пределов. Понятие о формуле Маклорена, формулы Маклорена для основных элементарных функций, их использование при вычислении пределов.

Понятие асимптоты. Определение параметров наклонной асимптоты.

ТЕМА 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Непрерывность функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность сложной функции.

Верхняя (нижняя) грань, глобальный максимум (минимум) функции в ее области определения. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции. Теорема Больцано — Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции у функции, строго возрастающей (строго убывающей) и непрерывной в промежутке (на отрезке).

Понятие равномерной непрерывности функции одной переменной в ее области определения. Теорема Кантора.

ТЕМА 7. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПОНЯТИЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ

Понятие конечной (бесконечной) производной функции одной переменной. Функции, не имеющие ни конечной, ни бесконечной производной. Геометрическая и механическая интерпретации производной. Уравнение вертикальной и невертикальной касательной. Предельная полезность продукта и предельная производительность ресурса. Эластичность функции и ее геометрическая интерпретация.

Понятие дифференцируемой функции и дифференциала функции одной переменной. Геометрическая интерпретация дифференциала. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной.

Понятие о примере Б.Л.Ван-дер-Вардена. Производная суммы, произведения, дроби, сложной и обратной функции. Производные основных элементарных функций. Свойства дифференциала.

Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной и их свойства. Неинвариантность формы дифференциалов высших порядков.

ТЕМА 8. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Экстремум функции. Необходимое условие (первого порядка) внутреннего локального экстремума. Теорема Ролля, ее геометрический смысл. Теорема Лагранжа о конечном приращении, ее геометрический смысл. Теорема Коши. Правило Лопиталя: доказательство для случая $\left(\frac{0}{0}\right)$. Формулы Тейлора и Маклорена с остаточным членом в форме Пеано. Формула Тейлора с остаточным членом в Лагранжа и Коши. Запись формулы Тейлора через дифференциалы. Использование формулы Маклорена для приближенных вычислений. Необходимые и достаточные условия монотонности функции на интервале. Необходимое условие экстремума второго порядка. Три достаточных условия экстремума функции одной переменной.

Вертикальные и невертикальные асимптоты графика функции одной переменной. Анализ функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика.

Решение задачи максимизации прибыли фирмы в терминах объема выпускаемой продукции, а также в случае одного ресурса.

Понятие о методах приближенного вычисления корней функций одной переменной.

ТЕМА 9. ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Понятие выпуклого множества. Выпуклость функции (строгая и нестрогая). Геометрическое определение с помощью хорд и его перевод на язык неравенств. Определение выпуклости с помощью касательной. Необходимые и достаточные условия выпуклости. Необходимые и достаточные условия выпуклости дважды дифференцируемой функции. Понятие точки перегиба. Необходимые и достаточные условия точки перегиба.

ТЕМА 10. МНОЖЕСТВА ТОЧЕК И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Множество всех n-мерных векторов (точек). Длина вектора, расстояние между точками; неравенство треугольника. Понятие окрестности. Множества связные, несвязные, ограниченные, неограниченные. Понятие области. Понятие направления в точке.

Последовательность векторов (точек) на плоскости и в n-мерном пространстве. Понятие ограниченной и неограниченной последовательности векторов (точек). Понятие о сходимости последовательности векторов (точек). Взаимосвязь с покоординатной сходимостью. Лемма о предельном векторе (точке). Понятие подпоследовательности векторов (точек).

ТЕМА 11. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)

Функции двух и нескольких переменных. Область определения и область изменения функции. Множество уровня. Ограниченные функции. Конечный (бесконечный) предел функции двух и нескольких переменных (по Коши и по Гейне). Бесконечно малые функции, их связь с понятием предела. Функции, не имеющие ни конечного, ни бесконечного предела. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные пределы. Предел функции по направлению. Повторные пределы. Теорема о существовании повторного предела.

Непрерывность функции двух и нескольких переменных в точке и на множестве. Точки непрерывности и точки разрыва функции. Непрерывность функции в точке по направлению. Взаимосвязь между непрерывностью функции и ее непрерывностью по направлению. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Теорема Больцано — Коши. Теорема Кантора.

ТЕМА 12. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Частные производные ФНП. Градиент. Дифференцируемость. Главная линейная часть приращения ФНП и остаточный член. Дифференциал ФНП. Достаточное условие дифференцируемости.

Геометрическая интерпретация частных производных. Касательная плоскость к графику ФНП. Дифференцируемость сложных ФНП. Инвариантность формы дифференциала ФНП.

Однородные функции. Теорема Эйлера об однородных функциях и ее применение в экономической теории. Производная по направлению. Свойства градиента. Частные производные и дифференциалы порядка выше первого. Достаточные условия равенства смешанных производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа (без доказательства).

ТЕМА 13. АБСОЛЮТНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Экстремум ФНП (абсолютный, условный, локальный, глобальный). Необходимое условие (первого порядка) локального абсолютного экстремума. Квадратичные формы, знакоопределенность, характерные графики. Критерий Сильвестра (без доказательства). Необходимое условие экстремума второго порядка. Достаточное условие (второго порядка) локального абсолютного экстремума. Выпуклые и строго выпуклые функции. Элементы теории экстремума для выпуклой функции.

ТЕМА 14. ТЕОРИЯ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАДАЧИ МИКРОЭКОНОМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятие функции, заданной неявно. Примеры однозначного и неоднозначного локального решения уравнения $f(x, y) = 0$. Теорема о неявной функции для случая одного уравнения с двумя переменными (формулировка). Теоремы о существовании и гладкости неявных функций. Теорема о существовании и гладкости обратной функции как частный случай теоремы о неявной функции. Геометрическая и аналитическая интерпретации теоремы о неявной функции. Касательная к линии уровня функции. Линеаризация уравнения, приближенное решение нелинейного уравнения. Вычисление дифференциала неявной функции.

Функции спроса по Маршаллу и функции спроса по Хиксу в количественной теории полезности и в теории производства.

ТЕМА 15. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Постановка задачи условной оптимизации. Функция Лагранжа и множители Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие (первого порядка) локального условного экстремума. Исследование с помощью линий уровня и градиентов. Достаточное условие (второго порядка) локального условного экстремума. Теорема об огибающей, случаи безусловного и условного экстремума. Гомотетичные функции. Примеры. Свойства изоквант гомотетичных функций. Свойства множеств точек условного экстремума в задачах с гомотетичными функциями. Задача глобальной оптимизации. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.

ТЕМА 16. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ПРИМЕРЫ ПРОСТЕЙШИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ЛИНЕЙНЫХ

Две леммы о функциях одной переменной, производные которых равны (в частности, нулю).

Понятие первообразной функции. Понятие неопределенного интеграла, его свойства. Таблицы неопределенных интегралов. Формулировка теоремы о существовании первообразной у непрерывной функции. Приемы интегрирования (табличное, разложением, заменой переменной и по частям).

Понятие о простейших обыкновенных дифференциальных уравнениях первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения.

ТЕМА 17. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегральная сумма Римана, определенный интеграл и его геометрическая интерпретация. Необходимое условие интегрируемости функции по Риману. Свойства определенного интеграла (связанные с подынтегральной функцией, с отрезком интегрирования). Определенный интеграл — линейный функционал. Теорема о среднем значении. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его производная по этому пределу. Вторая основная теорема интегрального исчисления (о существовании определенного интеграла у непрерывной функции). Формула Ньютона — Лейбница. Формулировка критерия интегрируемости. Примеры его применения. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость функции, монотонной на отрезке. Интегрируемость ограниченной функции, имеющей конечное число точек разрыва. Формулировка теоремы Лебега о необходимом и достаточном условии интегрируемости по Риману функции одной переменной. Замена переменной в определенном интеграле, ее геометрический смысл. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Применение определенного интеграла для вычисления площадей. Понятие о методах приближенного вычисления определенных интегралов (методы прямоугольников, трапеций и Симпсона).

ТЕМА 18. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНГТЕГРАЛЫ

Несобственные интегралы первого и второго рода и связь между ними. Критерий Коши для несобственных интегралов.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Примеры. Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов. Простейшие несобственные интегралы.

ТЕМА 19. ПОНЯТИЕ О КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Понятие двойного интеграла и его геометрическая интерпретация. Свойства двойного интеграла, связанного с подынтегральной функцией и с областью интегрирования. Двойной интеграл — линейный функционал. Классы интегрируемых функций. Сведение двойного интеграла к повторному. Понятие о замене переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО ЭТОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 2 изд. М.: Высшая школа, 2000.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. М.: Наука, 1985 и последующие издания.

4. Количественные методы в экономических исследованиях. Под редакцией М.В. Грачевой, Л.Н. Фадеевой, Ю.Н. Черемных. М.: ЮНИТИ, 2004.

5. Математический анализ. Учебно-методическое пособие. / Под ред. Ю.Н. Черемных. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991.

6. Кочергин А.В, Кострикин И.А. Математический анализ. Учебно-методическое пособие. М.: Экономический ф-т МГУ, 2011.

7. Кочергин А.В, Кострикин И.А. Методические материалы по курсу математического анализа (Интеграл и функции нескольких переменных). М.: Экономический ф-т МГУ, ТЕИС, 2009

8. Любкин А.А. Введение в математический анализ: Учебно-методическое пособие. М.: МАКС – Пресс, 2008.

9. Черемных Ю.Н., Дёмушкина О.И. Математический анализ: Учебно-методическое пособие: Часть 1. М.: МАКС – Пресс, 2010.

10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.

11. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Издательство МГУ, 1988.