«Математический анализ – 3»

Статус дисциплины: *по выбору*, читается на программе бакалавров по направлению «Экономика» в 3 семестре

Место дисциплины в структуре основной образовательной программы подготовки бакалавра

Математический анализ – 3 является естественным развитием курса математический анализ – 2 и служит основой для углубленного изучения таких дисциплин, как дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, методы оптимальных решений, теория игр и ряда экономико-математических дисциплин.

Для успешного овладения курсом студентам необходимы хорошие знания по следующим дисциплинам: линейная алгебра – 2, математический анализ – 2.

Лектор: Кострикин И.А.

Предполагаемые семинаристы: Кострикин И.А., Кочергин А.В., Клачкова О.А.

Пререквизиты: математический анализ – 2, линейная алгебра – 2.

Курс является пререквизитом к курсу «Дифференциальные уравнения» (4 семестр).

Тема 1. Теорема о неявной функции

Отображение, дифференциал отображения, матричная запись дифференциала. Свойства дифференциала. Дифференциал сложного отображения. Геометрическая интерпретация дифференциала отображения.

Понятие функции, заданной неявно. Теорема о неявной функции для случая одного уравнения с n переменными. Геометрическая и аналитическая интерпретации теоремы о неявной функции. Касательная к поверхности уровня функции. Линеаризация уравнения, приближенное решение нелинейного уравнения. Вычисление дифференциала неявной функции.

Формулировка теоремы о неявной функции для системы уравнений в скалярной и матричной формах. Пересечение поверхностей уровня функций. Достаточное условие локальной разрешимости системы уравнений и его связь с условием разрешимости системы линейных уравнений. Вычисление дифференциала векторной функции, заданной неявно.

Тема 2. Применение теории неявной функции и условного экстремума

Постановка задачи условной оптимизации с несколькими ограничениями. Необходимое условие условного экстремума: геометрическая идея, доказательство с помощью теоремы о неявной функции. Достаточные условия условного экстремума. Нахождение глобального максимума и минимума функции.

Теорема о маргинальных значениях, ее интерпретация. Теорема об огибающей, случаи безусловного и условного экстремума. Однородные и гомотетичные функции. Примеры. Теорема Эйлера для однородных функций. Свойства изоквант гомотетичных функций. Свойства множеств точек условного экстремума в задачах с гомотетичными функциями.

Тема 3. Выпуклые множества и выпуклые функции

Понятие выпуклого множества. Понятие выпуклой и вогнутой функций двух и нескольких переменных. Теорема о непрерывности выпуклой функции, определенной на выпуклом открытом множестве. Необходимые и достаточные условия выпуклости для непрерывных, дифференцируемых функций и дважды дифференцируемых функций. Экстремум выпуклой функции. Связь выпуклости функции и выпуклости различных множеств с нею связанных (надграфик, оптимальное множество и т.д.). Понятие квазивыпуклой функции.

Тема 4. Кратные интегралы

Определение двойного интеграла. Необходимое условие интегрируемости. Свойства двойного интеграла, связанные с подынтегральной функцией и с областью интегрирования.

Формулировка критерия интегрируемости. Понятие кратного интеграла. Переход к повторному интегралу (идея доказательства). Замена переменных в двойном и тройном интеграле (формулировка). Геометрический смысл. Переход к полярным координатам. Понятие несобственного двойного интеграла. Вычисление интеграла Пуассона с помощью двойного интеграла. Вычисление площадей и объемов с помощью двойных интегралов.

Тема 5. Интегралы, зависящие от параметра. Интегралы Эйлера

Понятие интеграла, зависящего от параметра. Свойства интеграла, зависящего от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Понятие равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра. Свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость. Интегралы Эйлера; их свойства.

Тема 6. Числовые ряды

Понятие числового ряда, его общего члена и частной суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Примеры. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши для рядов. Расходимость гармонического ряда. Интегральный признак Коши сходимости и расходимости. “Эталонные” ряды. Признаки сходимости для знакопостоянных рядов: признаки сравнения, признаки Даламбера, Коши. Понятие абсолютной и условной сходимости знакопеременных рядов. Сходимость абсолютно сходящегося ряда. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Формулировка теоремы Коши об абсолютно сходящихся рядах. Формулировка признака Дирихле-Абеля.

Тема 7. Функциональные последовательности и ряды

Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Понятие области сходимости и суммы функционального ряда. Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Критерий *lim-sup* равномерной сходимости функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Формулировки признаков Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда. Теорема о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся последовательности и суммы функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Тема 8. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Первая теорема Абеля. Понятие радиуса и промежутка сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Теорема о равномерной сходимости степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов. Формулировка второй теоремы Абеля. Примеры применения. Теорема о единственности разложения функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и Маклорена. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Понятие функции, аналитической в точке. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической. Суммирование степенных рядов. Приближенное вычисление определенных интегралов с помощью разложения функции в степенной ряд. Формулировка теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами.

Примечание. При чтении курса окончательный набор тем, их наполнение и порядок изучения определяются **лектором**. Количество, формат и график контрольных работ также регулируется **лектором**.

Система оценивания

Экзаменационная оценка выставляется по итогам двух поточных контрольных работ, теоретической микроконтрольной и экзаменационной работы, на которую приходится 40% от общей суммы баллов. По отдельным частям контрольных работ, по экзаменационной работе и по общей сумме баллов установлены критерии, на основании которых выставляется экзаменационная оценка. Если к экзамену не зачтены хотя бы две части из семестровых контрольных работ, студент пишет на экзамене так называемый спецвариант, включающий в себя задачи и вопросы по практическим и самым простым теоретическим материалам всего семестра. Студент, пишущий спецвариант, заведомо получает оценку не выше, чем "удовлетворительно"; при этом, как и на основном варианте, учитывается работа в семестре.

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1, 2. М.: Физматлит, 2005.

2. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н., Лекции по математическому анализу, изд. 2-ое, М.: Высшая Школа, 2000.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ: Астрель, 2010.

4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

5. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу (числовые и функциональные ряды). М.: Факториал, 1996.