Оценка волатильности финансовых временных рядов

Сергей Саркисян

Экономический факультет МГУ

30 октября, 2018

План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

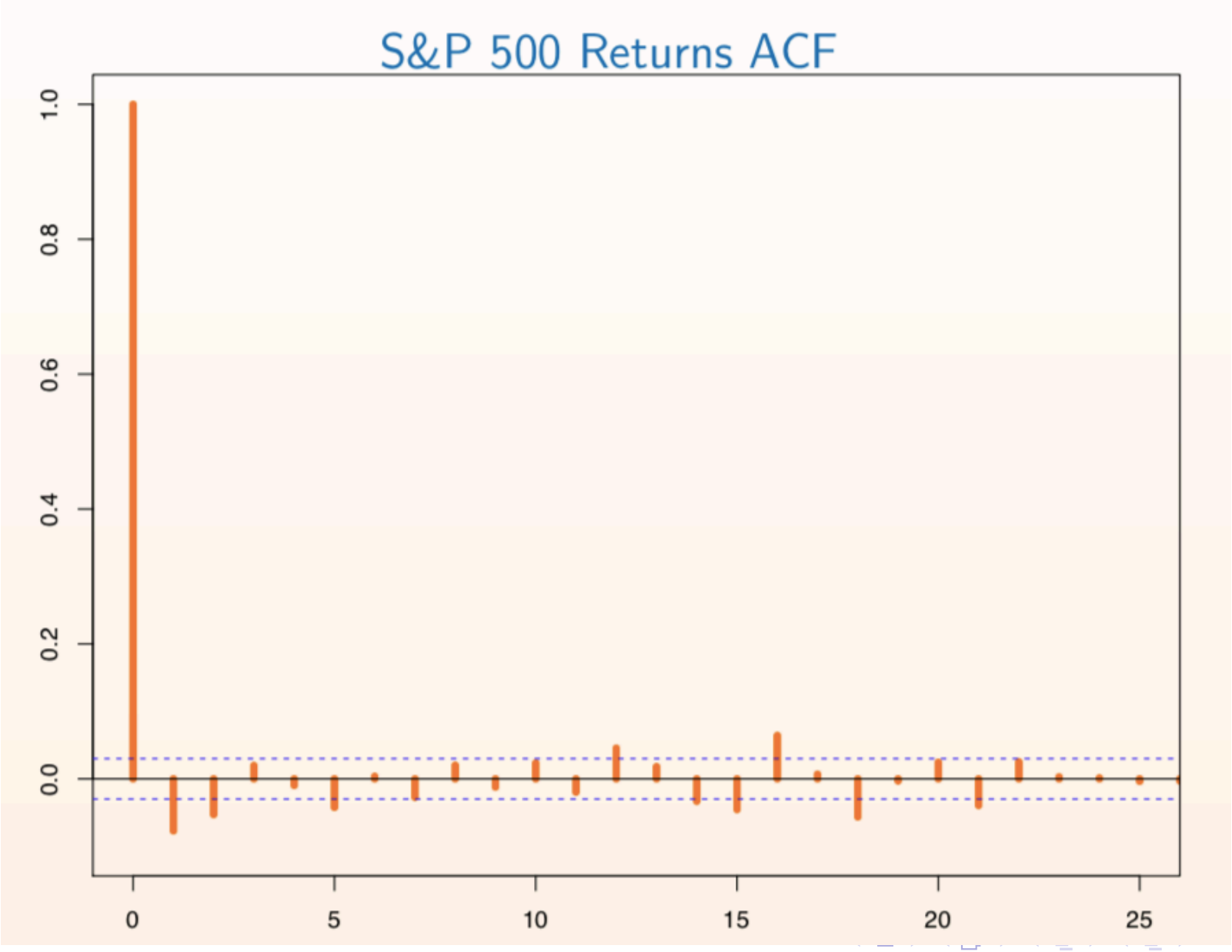
План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

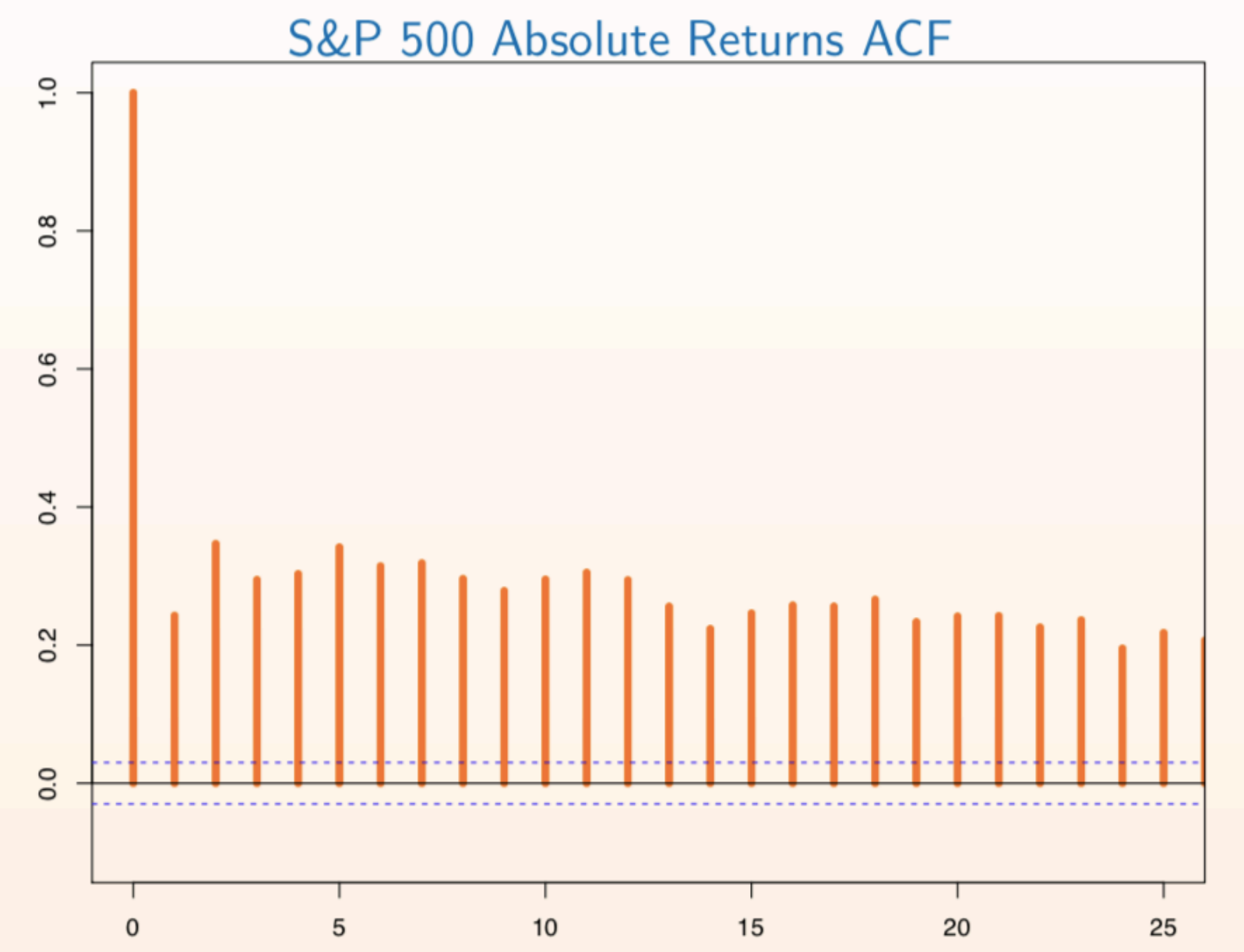
Кластеризация волатильности

- Анализ ACF/PACF зачастую указывает на отсуствие автокорреляции остатков в временных рядах.
- Однако такой анализ не учитывает, что после больших скачков, как правило, следуют большие скачки.
- Этот факт называют *volatility clustering*. Для его выявления нужно построить коррелограмму квадратов или модулей остатков.

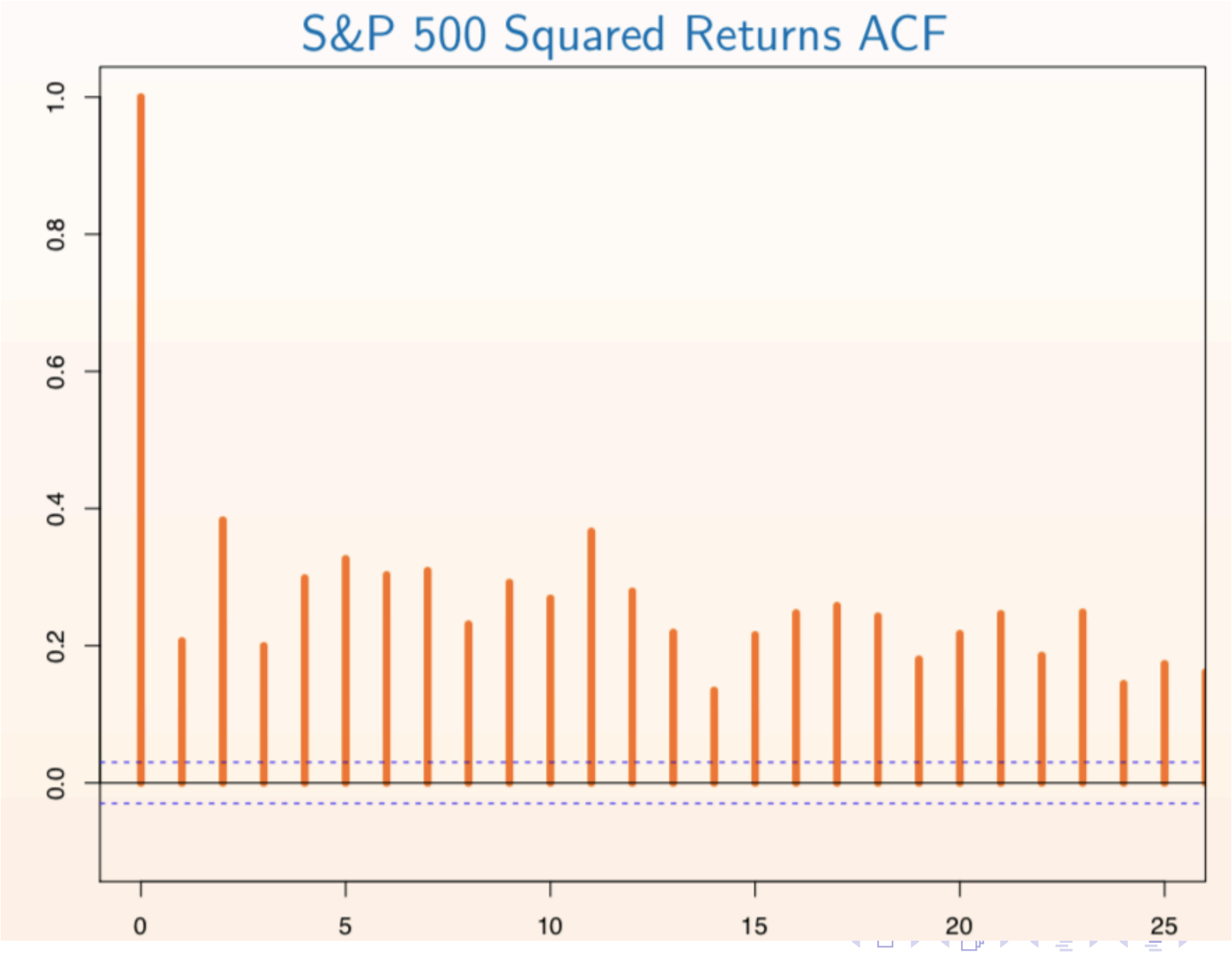
Кластеризация волатильности: S&P500



Кластеризация волатильности: S&P500



Кластеризация волатильности: S&P500



План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

ARCH-модели

- ARCH (Engle, 1982) - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

- ARCH(q) модель:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t^2} z_t, \quad z_t \sim \mathcal{D}(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 r_{t-1}^2 + \alpha_2 r_{t-2}^2 + ... + \alpha_q r_{t-q}^2,$$

где $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \leq 1$

- r_t - доходность, σ_t^2 - условная дисперсия доходности

ARCH-модели

- $E(r_t) = 0$
- $\sigma^2 = Var(r_t) = \frac{\omega}{1-\alpha}$
- $kurt(r_t) = 3\frac{1-\alpha_1^2}{1-3\alpha_1^2}$
- $\rho_k(r_t) = 0$
- $\rho_k(r_t^2) = \alpha_1^k$

ARCH-модели

- На практике только при помощи ARCH-модели с большим количеством параметров можно корректно описать финансовые данные.
- Но такие модели зачастую сложно оценить, у них невысокий R^2 и высокая нестабильность. Поэтому придумали более компактный способ оценки...

План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

GARCH-модели

- GARCH (Bollerslev, 1986) - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

- GARCH(1,1) модель:

$$r_t = \sqrt{\sigma_t^2} z_t, \quad z_t \sim \mathcal{D}(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

где $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta < 1$

- $\alpha + \beta$ - GARCH persistence

GARCH-модели

- GARCH(1,1) можно представить в виде ARCH(∞):

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1-\beta} + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} r_{t-i}^2$$

- Пусть $\eta_t = r_t^2 - \sigma_t^2$. Тогда GARCH(1,1) можно представить в виде ARMA(1,1):

$$r_t^2 = \omega + (\alpha+\beta) r_{t-1}^2 + \eta_t - \beta \eta_{t-1}$$

- GARCH-прогноз на h шагов вперед:

$$\sigma_{T+h|T}^2 = \sigma^2 + (\alpha+\beta)^{h-1}(\sigma_{T+1|T}^2 - \sigma^2)$$

Выявление ARCH-эффектов

ARCH-LM тест (Engle, 1982):

1. Оценить модель с помощью МНК:

$$r_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + ... + \alpha_p r_{t-p}^2 + u_t$$

2. $H_0 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_p = 0$

3. При выполнении нулевой гипотезы статистика $T \cdot R^2$ распределена как χ_p^2.

GARCH-модели: оценивание

- Для оценивания используется ММП
- Нужно предположить нормальное распределение
- Логарифм функции максимального правдоподобия:

$$log\mathcal{L}_T(\theta) = \sum_{t=2}^{T} -\frac{1}{2}log(2\pi) - \frac{1}{2}log\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\frac{r_t^2}{\sigma_t^2},$$

где $\theta = (\omega, \alpha, \beta)'$

- Тогда ММП-оценка равна

$$\hat{\theta} = arg\ max\ log\mathcal{L}_T(\theta)$$

GARCH-модели: оценивание

- ММП-оценивание GARCH требует нормальное распределение.
- На практике нормальное распределение, особенно стандартное нормальное распределение, встречаются далеко не всегда.
- Для решения этой проблемы следует использовать QMLE вместо MLE (Bollerslev and Wooldridge, 1992).

GARCH-модели: оценивание

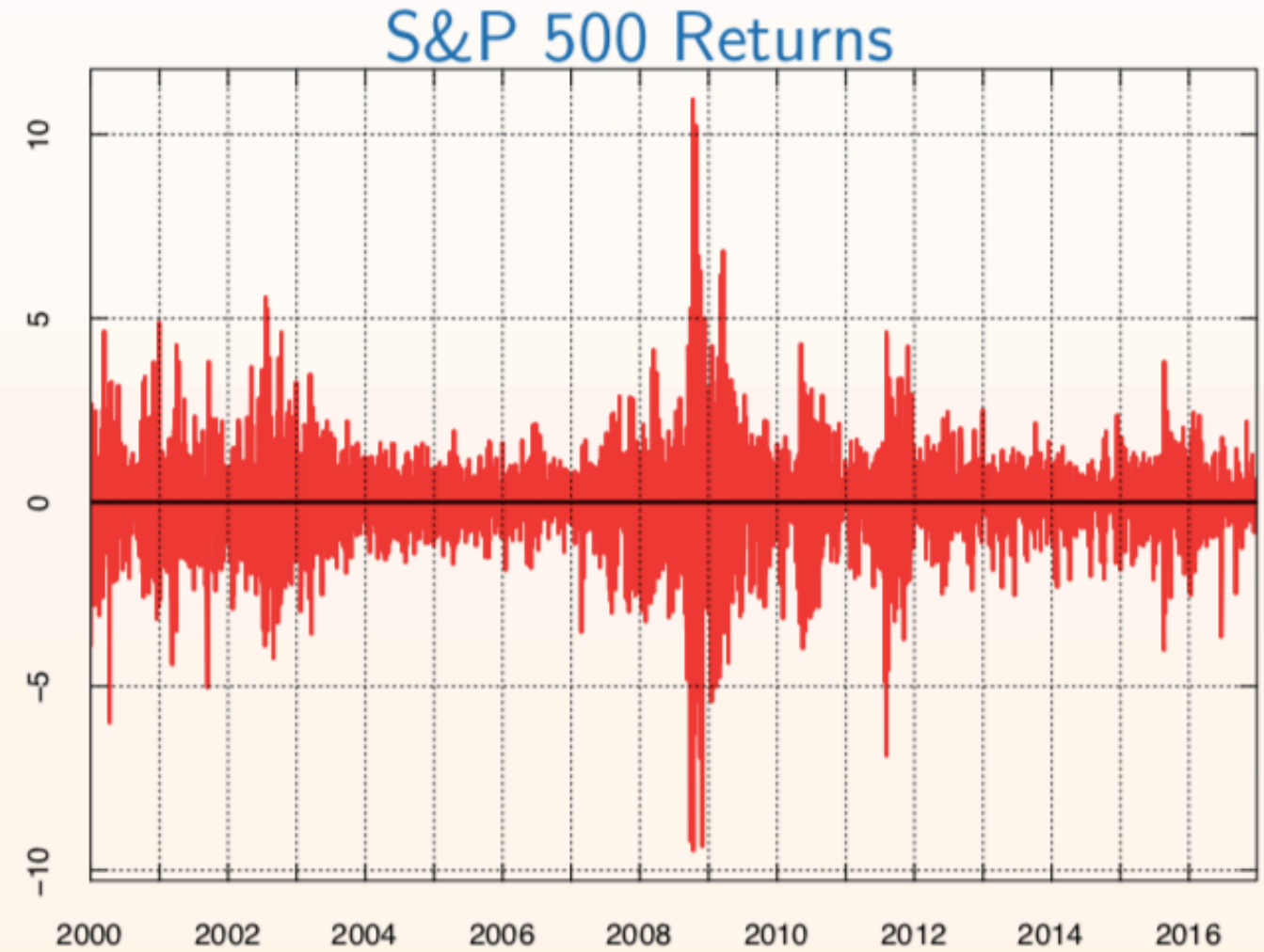
- После оценивания модели нужно проверить, правильно ли мы ее специфицировали.
- Надо расчитать остатки на основе ММП-оценки:

$$\hat{z}_t = \frac{r_t}{\hat{\sigma}_t^2},$$

где $\hat{\sigma_t}^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha} r_{t-1}^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^2$

- Если модель корректна, то остатки будут распределены согласно исходному распределению, не будет никаких выбросов (в том числе в квадратах и модулях). Для проверки нормальности распределения стоит использовать тест Харке-Бера.

Пример: S&P500



ARCH-LM Stat: 686.169 - p–value < 0.001

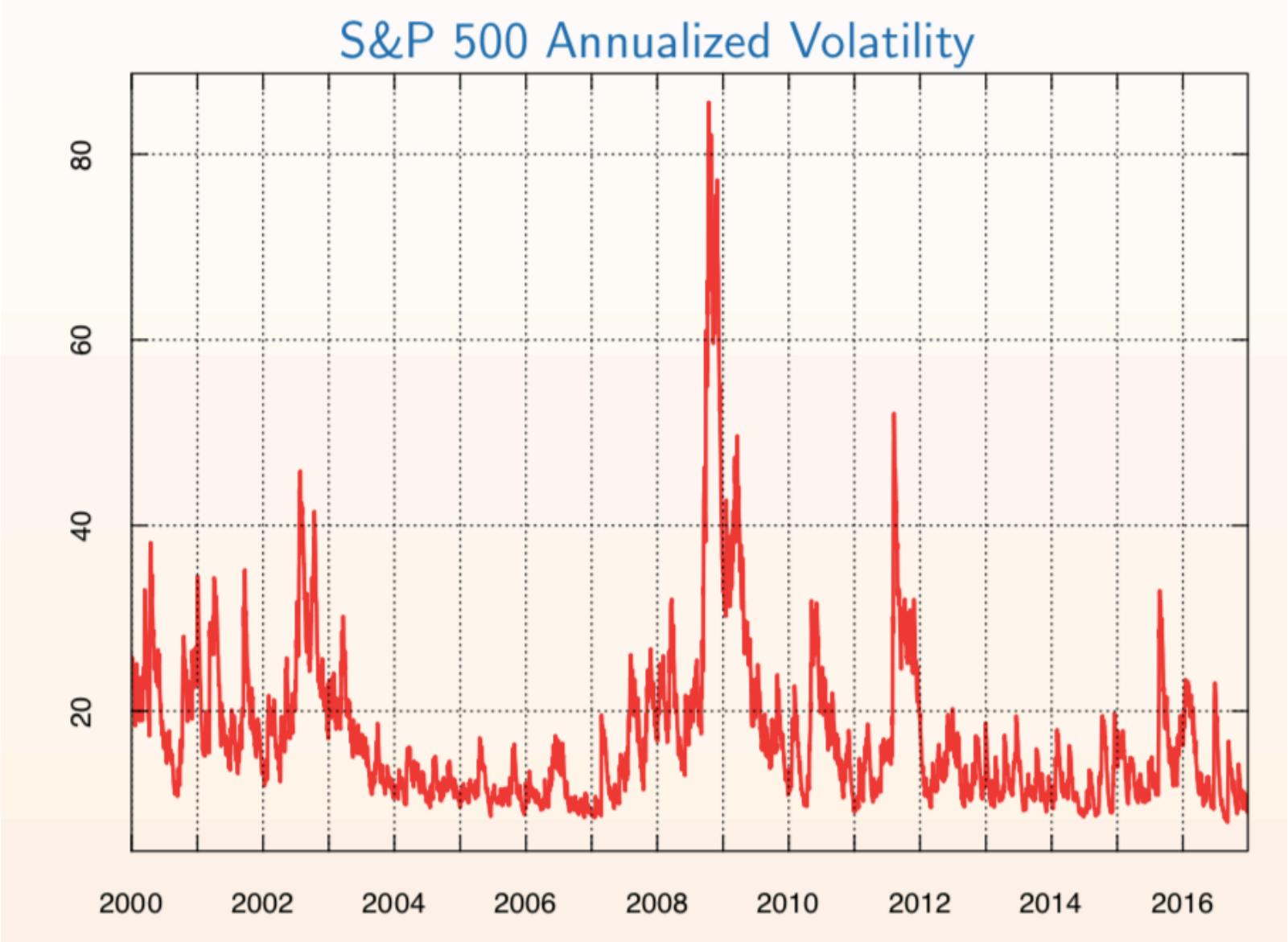
Пример: S&P500

Estimates

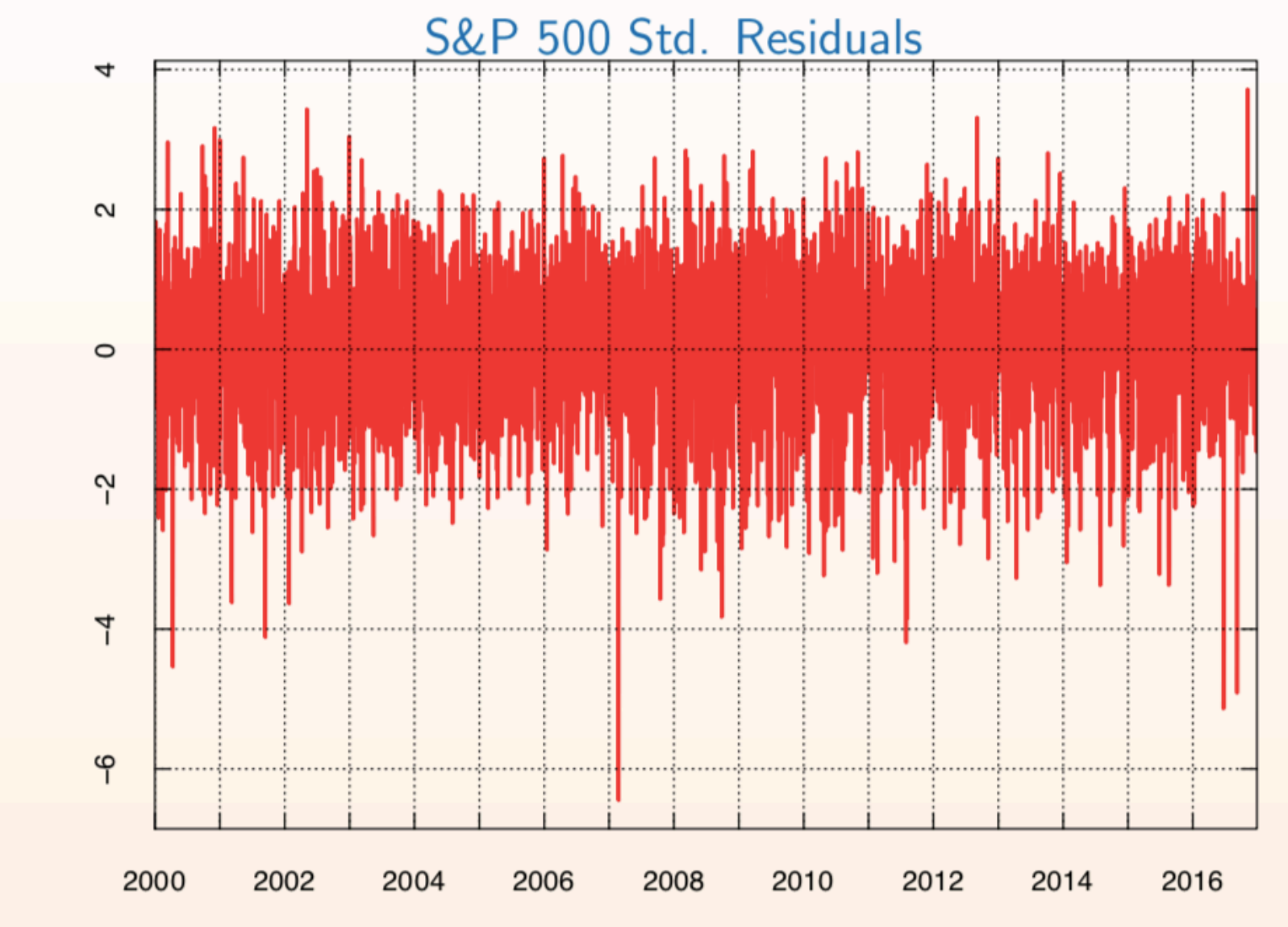
	param	se	t-stat
ω	0.017660	0.002340	7.546
α	0.094159	0.007001	13.450
β	0.892975	0.007805	114.414

Estimated GARCH Volatility Persistence: 0.987

Пример: S&P500



Пример: S&P500



План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

Эффект рычага

- GARCH-модели довольно удачно описывают волатильность финансовых инструментов.
- Но их можно улучшить!
- Например, наблюдается эффект рычага, то есть асимметрия.
- Отрицательная доходность повышает волатильность сильнее, чем положительная (эмпирический факт).

Эффект рычага

- Тест на асимметрию:

$$\hat{z}_t^2 = c_0 + c_1 \mathbb{I}_{(r_{t-1}<0)} + u_t$$

$$\hat{z}_t^2 = c_0 + c_1 r_{t-1} \mathbb{I}_{(r_{t-1}<0)} + u_t$$

- Тестовая статистика - t-статистики коэффициента c_1.

Пример: S&P500

Volatility Asymmetry Test

	stat	p-value
Negative Sign	4.558	<0.001

TARCH-модель

- TARCH (Zackonian, 1993) - Threshold Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- Распределение $\mathcal{D}$ такое, что $P(z < 0) = P(z > 0) = 0.5$
- TARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha r_{t-1}^2 + \gamma r_{t-1}^2 \mathbb{I}_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

где $\omega > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \gamma/2 + \beta < 1$

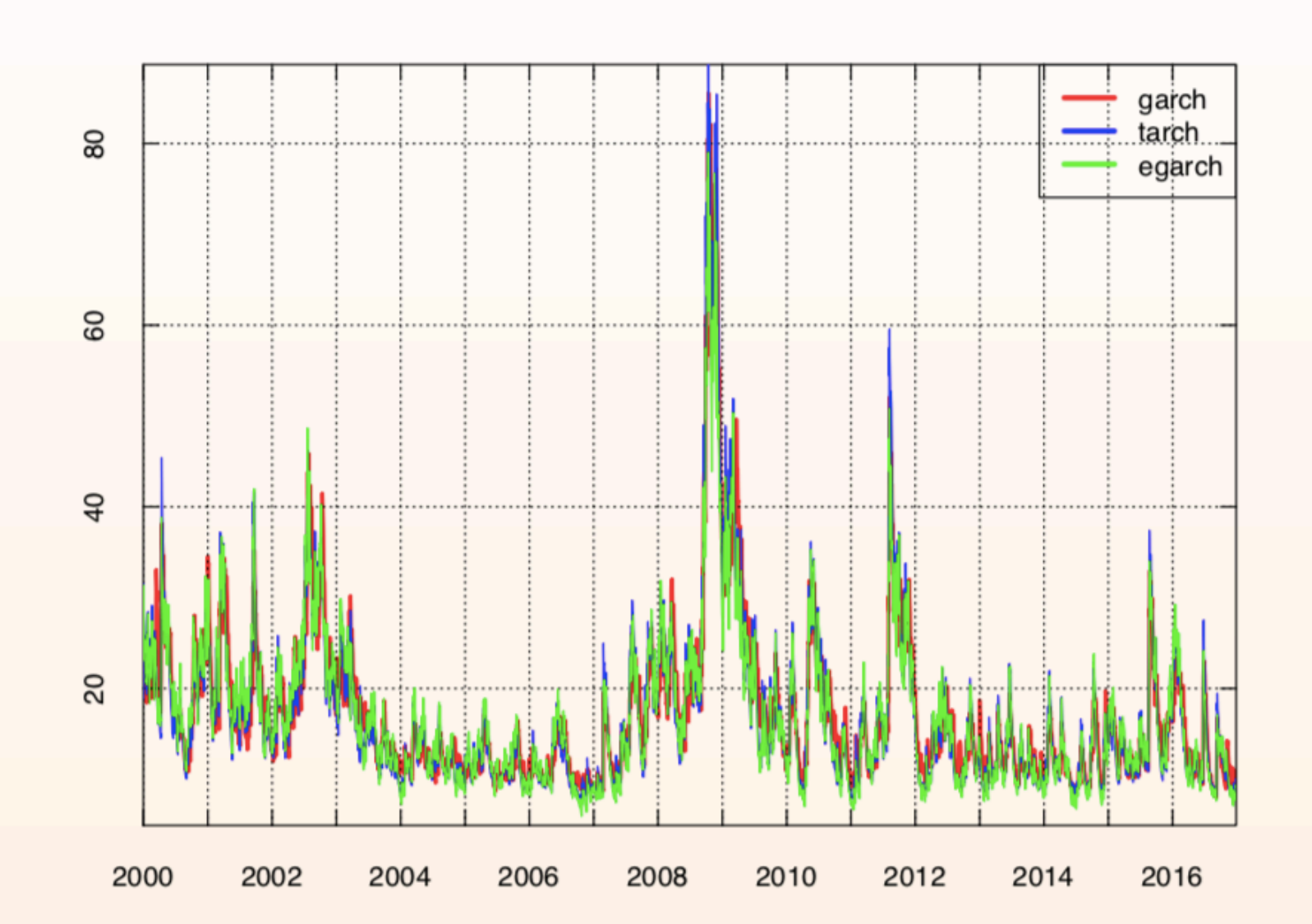
EGARCH-модель

- EGARCH (Nelson, 1991) - Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- EGARCH(1,1):

$$log\sigma_t^2 = \omega + \alpha(\frac{|r_{t-1}|}{\sigma_{t-1}} - m) + \gamma\frac{r_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta log\sigma_{t-1}^2,$$

где $m = E|z_t|$

Пример: S&P500



План

1. Кластеризация волатильности
2. ARCH-модели
3. GARCH-модели
4. Проблемы GARCH-моделей и пути их решения
5. Оценка качества прогноза

Оценка качества прогноза

- Обозначения:
  - σ_t^2 - истинная волатильность
  - $\tilde{\sigma}_t^2$ - прокси для волатильности
  - $\sigma_{t|t-1}^2$ - оценка волатильности
  - $L(\cdot,\cdot)$ - прогнозная функция потерь
- Будем оценивать волатильность для периодов с $T+1$ до $T+M$
- Оценивается прогнозная функцией потерь:

$$L = \frac{1}{M}\sum_{t=T+1}^{T+M} L(\tilde{\sigma}_t^2, \sigma_{t|t-1}^2)$$

Оценка качества прогноза

- Что же брать за функцию потерь?
- Patton (2010) предложил две спецификации, которые ранжируют оценки волатильности вне зависимости от того, какой прокси был выбран:

$$QL : L(\tilde{\sigma}_t^2, \sigma_{t|t-1}^2) = \frac{\tilde{\sigma}_t^2}{\sigma_{t|t-1}^2} - log\frac{\tilde{\sigma}_t^2}{\sigma_{t|t-1}^2} - 1$$

$$MSE : L(\tilde{\sigma}_t^2, \sigma_{t|t-1}^2) = (\tilde{\sigma}_t^2 - \sigma_{t|t-1}^2)^2$$

Оценка качества прогноза

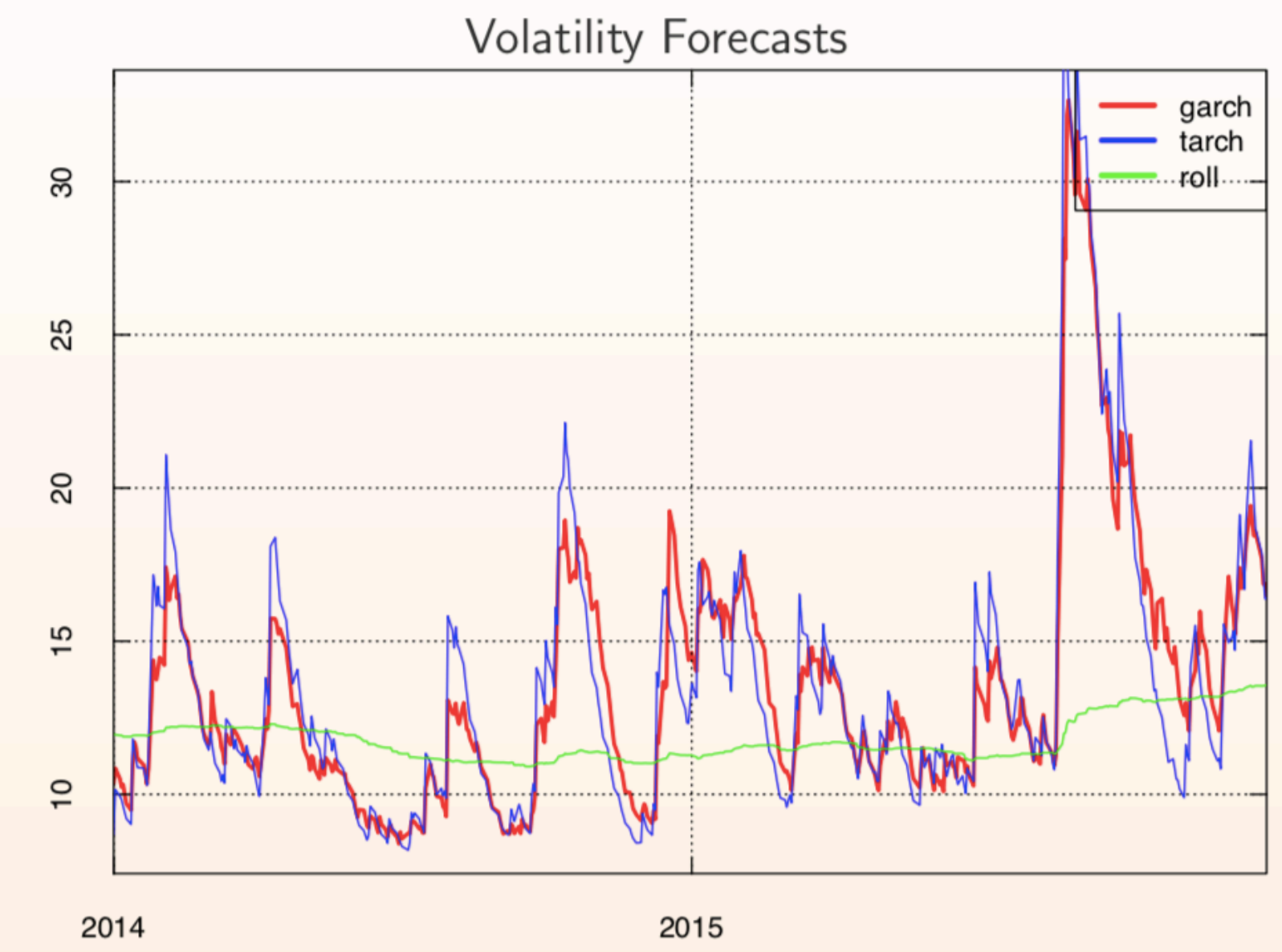
- Equal Predictive Ability test (Diebold and Mariano, 1995)
- $\sigma^2_{(a)t|t-1}$ и $\sigma^2_{(b)t|t-1}$ - прогнозы волатильности с помощью стратегий a и b соответственно
- Построим временной ряд разниц между потерями прогнозов:

$$d_t = L_{(a)t} - L_{(b)t}$$

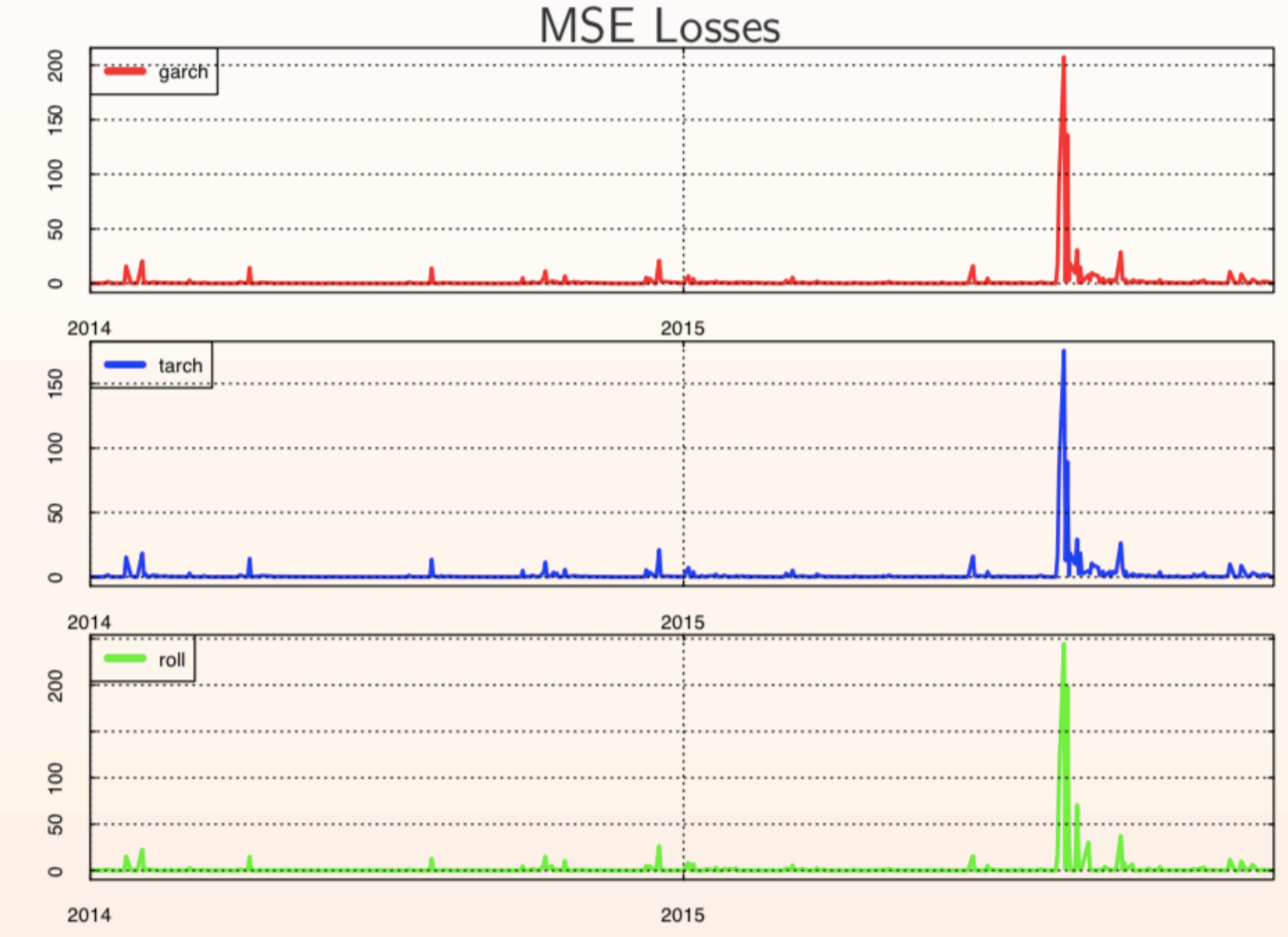
- Если качества прогнозов не отличаются, то $E(d_t) = 0$. Это и будет нулевой гипотезой EPA-теста.
- Тестовая статистика (асимптотически распределена нормально):

$$DM = \frac{\bar{d}}{\sqrt{v_d/M}}$$

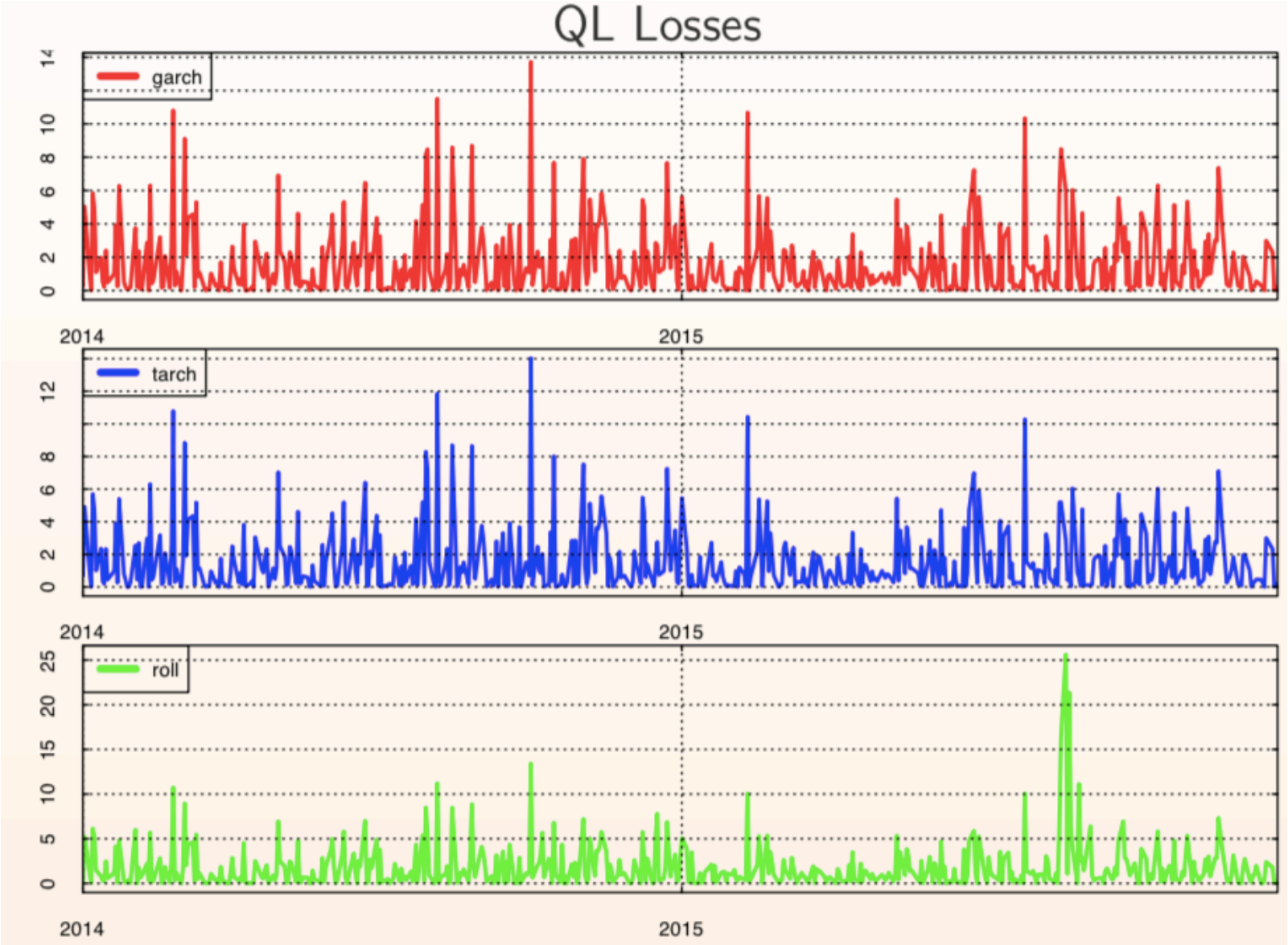
Пример: S&P500



Пример: S&P500



Пример: S&P500



Пример: S&P500

Are ARCH models significantly better than Rolling Variance?

	GARCH	TARCH
DM stat (QL)	-1.917	-2.341
p-val	0.055	0.019
DM stat (MSE)	-1.152	-1.411
p-val	0.249	0.158

Volatility Proxy: Squared Returns

Выводы

1. В финансовых временных рядах довольно часто наблюдается проблема кластеризации волатильности, что не позволяет моделировать их при промощи ARIMA
2. Есть целый класс моделей для оценки волатильности: ARCH, GARCH, TARCH, EGARCH
3. Качество прогноза этих моделей выше, чем у простой rolling variance
4. Чтобы учесть эффект рычага, следует всегда использовать TARCH-модель