

Моделирование малой открытой экономики — экспортера нефти

Родион Латышов

МГУ

Ноябрь 2018



Содержание

1 Введение	3
1.1 Актуальность темы исследования	3
1.2 Цели и задачи исследования	3
1.3 Предполагаемая научная новизна	4
1.4 Теоретическая и методологическая основа исследования	4
1.5 Практическая значимость исследования	4
1.6 Объект и предмет исследования	4
2 DSGE	5
2.1 Обзор литературы	5
2.2 Оценивание DSGE моделей	7
2.3 DSGE модели России	10
2.3.1 Полбин А.В. « <i>Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики</i> ».	10
2.3.2 Малаховская О.А. « <i>Are commodity price shocks important? A Bayesian estimation of a DSGE model for Russia</i> ».	12
3 Модель	13
3.1 Задача потребителя	13
3.2 Задача фирмы	15
3.3 Фирмы-производители домашних товаров	15
3.4 Жесткость цен, или как фирмы устанавливают цены	16
3.5 Внешний сектор	16
3.6 Общее равновесие	17
3.7 Монетарная политика	18
Список литературы	18

1 Введение

1.1 Актуальность темы исследования

Россия – малая открытая экономика, зависящая от цен на нефть. Для того чтобы максимально точно прогнозировать, как основные макропеременные в текущем состоянии экономики будут реагировать на различные шоки, например, неожиданные изменения обменного курса, внешнего спроса, цен на нефть и др., важно иметь готовую модель экономики, наиболее достоверно отражающую действительность. С помощью такой модели можно исследовать, насколько при действующих денежно-кредитной и фискальной политиках российская экономика устойчива к потенциальным инновациям, в том числе и неблагоприятным. Поскольку в существующие модели не заложено новое бюджетное правило, а также они не включают банковский сектор (финансовых посредников) в рассмотрение, в данной работе будут учтены эти недостающие элементы.

1.2 Цели и задачи исследования

Целью исследования является решение проблемы выбора оптимальной (с точки зрения устойчивости основных макропеременных к реализующимся шокам) денежно-кредитной политики, определение наиболее опасных для экономики воздействий. Задачами исследования являются анализ литературы по теме исследования для выявления наилучшего подхода к моделированию, моделирование на базе микроэкономических обоснований различных секторов экономики и их взаимодействия, нахождение равновесного состояния экономики в таком сложном взаимодействии, моделирование динамики экономики около равновесного состояния с помощью внедрения шоков, калибровка модели, построение импульсных откликов на введенные в модель шоки, обоснование и интерпретация полученных результатов.

1.3 Предполагаемая научная новизна

Динамическая стохастическая модель российской экономики уже была построена Полбиным А.В. в работе «Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики» [1], а также Малаховской О.А. в статье «Are commodity price shocks important? A Bayesian estimation of a DSGE model for Russia» [2]. В своей работе, в отличие от Полбина А.В. и Малаховской О.А., будет введен банковский сектор, который связывает внешних агентов, производителей/фирмы и потребителей, а также учтено новое бюджетное правило, которое вступит в силу с 2018 года, и с помощью нововведений будет выявлен характер воздействия нового бюджетного правила на экономику при существующей сегодня денежно-кредитной политике.

1.4 Теоретическая и методологическая основа исследования

Данное исследование будет основано на динамической стохастической модели общего равновесия, такие модели являются сегодня основным методом моделирования реальных бизнес циклов.

1.5 Практическая значимость исследования

Теоретически обоснованная с высокой предсказательной точностью динамическая стохастическая модель может быть использована Центральным Банком для принятия решений по денежно-кредитной политике.

1.6 Объект и предмет исследования

Объект исследования: российская экономика. Предмет исследования: трансмиссионные механизмы в экономике, взаимодействия секторов в экономике и трансляция шоков внутри экономики.

2 DSGE

2.1 Обзор литературы

Прежде чем описывать существующие динамические стохастические модели общего равновесия (далее DSGE модели) для малых открытых экономик-стран-экспортеров нефти, важно рассказать о возникновении DSGE моделей, их эволюции и почему в них появилась необходимость.

DSGE модели сочетают в себе теоретические микроэкономические предпосылки и эмпирику. В отличие от чисто эмпирических эконометрических моделей, таких как VAR (vector-autoregression) модель и её разновидности (Structural VAR, Bayesian VAR, Factor-Augmented VAR и др.), в DSGE моделях зависимости между переменными получаются из решения задачи общего равновесия, а не из исключительно оценки параметров модели на исторических данных. Сначала записывают задачи потребителя, производителей, условия равновесия на рынке конечного блага, рынке финансовых активов, бюджетное ограничение и др., вводятся шоки. После этого находят равновесное состояние экономики. Затем лог-линеаризуют уравнения вокруг равновесного состояния. Лог-линеаризованные около равновесного состояния уравнения как раз и задают зависимости между макропеременными. Параметры в этих уравнениях оценивают из исторических данных различными методами, о которых будет рассказано позже.

Таким образом, вид зависимости между переменными в DSGE моделях имеет теоретическое обоснование, поэтому такие модели более робастны к выборке данных, нежели чисто эмпирические модели.

Первая DSGE модель, ставшая впоследствии известной и классической, - статья Kydland and Prescott (1982) [3]. Модель является расширением модели Рамсея, главное отличие заключается в том, что была введена инновация технологии, за счет чего флуктуировала производственная функция. Также известны статьи Long and Plosser (1983) [4] и Prescott (1986) [5], в которых также включен шок на производственную функцию, а именно на технологию A , которая входит в производственную функцию,

например, вида $Y = K^\alpha(AL)^{1-\alpha}$. В этих моделях считается, что эволюция технологии - это авторегрессионный процесс первого порядка $AR(1)$.

Последующие работы включали шок на государственные закупки, например, статьи Aiyagari, Christiano, and Eichenbaum (1992) [6], Baxter and King (1993) [7].

Во всех вышеназванных работах предложение труда задается экзогенно. Поэтому дальнейшим расширением моделей является включением в них рынка труда и включение труда в функцию полезности потребителя, так чтобы предложение труда задавалось эндогенно. Далее в модели вводятся шоки на предложение труда.

Главным же недостатком всех вышеупомянутых моделей является тот факт, что они предсказывают отсутствие эффекта от монетарной политики на реальные переменные. По этой причине в модели вводят так называемые номинальные жесткости (nominal rigidities, or price stickiness, or wage stickiness), которые предполагают, что номинальные цены, зарплаты меняются не мгновенно. Классический метод моделирования номинальных жесткостей описан в статье Calvo (1983) [8], в которой предполагается, что фирмы меняют цены с какой-то вероятностью, которая не зависит от времени последнего изменения цены. Альтернативой моделирования номинальных жесткостей являются так называемые rational inattention модели, в которых фирмы отслеживают шоки определенного типа, меняя цены только при реализации этих шоков.

Существует много разновидностей DSGE моделей, в которых включены или не включены те или иные секторы экономики. Например, в модель можно включить центральный банк, который устанавливает процентную ставку по правилу Тейлора [9]. Или предположить, что в экономике инфляция и безработица связаны кривой Филлипса.

Среди всего многообразия DSGE моделей автору интересны в основном те, которые моделируют малые открытые экономики, зависящие от цен на нефть.

Спецификация модели может быть сколь угодно сложной. Модель может включать и описывать множество секторов. Однако методы её решения, нахождения равновесного состояния, описания зависимостей около равновесного состояния и дальнейшего оценивания параметров модели общие для всех спецификаций.

Поэтому далее будет рассказано про методы решения и оценивания DSGE моделей в общем виде. Затем будут разобраны такие спецификации модели, в которых учтена зависимость экономики от цен на нефть, поскольку автора интересует, как можно органично включить переменную – цену на нефть в модель и задать её зависимость от других переменных.

2.2 Оценивание DSGE моделей

DSGE модели чаще всего описываются сложными нелинейными уравнениями. Тем не менее существуют методы оценивания DSGE моделей, общие для многих спецификаций. Анализ таких моделей состоит из следующих шагов:

- Нахождение равновесного состояния системы уравнений
- Лог-линеаризация системы уравнений вокруг равновесного состояния
- Второй шаг позволяет аппроксимировать нелинейную систему линейной (лог-линеаризованной) системой вокруг равновесного состояния:

$$Ax_{t+1} = Bx_t + Cv_{t+1} + Dn_{t+1} \quad (1)$$

где x_t - вектор переменных, v_t - вектор структурных шоков, n_{t+1} - вектор ошибок.

- Для дальнейшего оценивания модели систему уравнений записывают в виде стандартной линейной модели пространства состояний (state-space representation):

$$x_t = F(\mu)x_{t-1} + G(\mu)v_t \quad (2)$$

$$y_t = H(\mu)x_t + u_t \quad (3)$$

где μ - вектор оцениваемых параметров модели, x_t - вектор переменных состояния, y_t - вектор наблюдаемых эконометристом величин.

- Существует несколько алгоритмов, позволяющих представлять линейную систему уравнений 4 в виде стандартной линейной модели пространства состояний 5:

1. Разложение по собственным значениям, Blanchard and Kahn (1980) [10]
2. QZ - декомпозиция, Sims (2002) [11]
3. Метод неопределенных коэффициентов, Uhlig (1997) [12]

- После того как модель представили в виде стандартной линейной модели пространства состояний, переходят к оцениванию вектора параметров модели μ . Существует несколько способов:

1. **Калибровка.**

Значения параметров подбираются так, чтобы результаты оценивания модели максимально соответствовали наблюдениям. Варьируя параметры, строят импульсные отклики, а также симулируют временные ряды, затем сверяют с тем, что сгенерированные значения совпадают с реальными. Выбирают значения параметров такие, чтобы расхождения были минимальными.

2. **GMM (general method of moments).**

Записывают условия на моменты. Например, уравнение Эйлера - это первый момент (матожидание какой-то функции). Затем применяют стандартную процедуру оценивания параметров обобщенным методом моментов.

3. **Метод максимального правдоподобия.**

Поскольку не все переменные x_t наблюдаемые для того, чтобы посчитать $f(y_t|Y_{t-1})$, а затем и функцию правдоподобия, используют фильтр Калмана [13]

4. **Байесовская оценка.**

Самый распространенный метод оценки DSGE-моделей. Задается априорное распределение параметров модели $p(\mu)$. Имея данные и зная выборочное распределение $f(Y_T|\mu)$, получают оценку $p(\mu|Y_T)$.

Все описанные методы оценки моделей реализованы в программе Dynare, надстройке MATLAB, с которой можно ознакомиться на сайте <https://www.dynare.org>.

2.3 DSGE модели России

2.3.1 Полбин А.В. «Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики».

В статье «Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики» [1] автор учитывает высокую зависимость экономики от цен на нефть. Особенностью модели является многотоварная структура, в рамках которой нефть как экспортируется, так и используется в качестве фактора производства отечественных торгуемых и неторгуемых товаров. Одно из практических применений откалиброванной модели по мнению автора – эффект от изменения мировых цен на нефть.

Экономика разделена на следующие секторы:

- Домохозяйства
- Фирмы в торгуемом и неторгуемом секторах
- Внешний сектор
- Центральный банк
- Фискальный сектор
- Производство нефти

Предложение труда в модели определяется эндогенно, поскольку переменная – количество отработанных часов входит в функцию полезности домохозяйств.

Модель включает шоки предельной полезности потребления и предельной полезности досуга. Агент может занимать как внутри страны, так и извне по разным ставкам (внутренней и внешней). Так автор связывает внутренний и внешний секторы. Фирмы платят домохозяйствам дивиденды.

В функцию производства вводятся краткосрочные шоки совокупной факторной производительности.

Количество нефти задается экзогенно, фирмы сталкиваются с экзогенно заданным количеством нефти. Цена на нефть на внутреннем и внешнем рынке связана номинальным обменным курсом. Задастся шок на цену на нефть.

Также внешний сектор связан с внутренним благодаря тому, что внешний сектор предъявляет спрос на отечественные торгуемые товары. Также вводится шок внешнего спроса на отечественные торгуемые товары.

Предполагается, что центральный банк следует политике управляемого номинального обменного курса (управляемое плавание). Для описания деятельности центрального банка в модели автор предполагает, что номинальный обменный курс является экзогенной переменной, динамика которого задается стохастическим процессом, т.е. вводится шок обменного курса. Данное предположение является серьезным упрощением, которое обуславливается тем, что по мнению автора нет подтверждения того, что ЦБ пользовался каким-то инструментальным правилом денежно-кредитной политики.

Улучшением модели может быть включение финансового сектора в экономику. В такой модели ЦБ может корректировать курс, основываясь на остатках на корреспондентских счетах коммерческих банков.

Далее автор записывает условия равновесия на рынках труда, нефти, конечных товаров (торгуемых и неторгуемых отдельно), платежного баланса и рынке отечественных активов.

Далее автор калибрует модель, значения параметров модели берутся из других статей, строит импульсные отклики на все введенные в модель шоки.

Полученные результаты в рамках численных симуляций приводят к разумным и непротиворечивым выводам, которые качественно согласуются с российской действительностью. Для получения более точных количественных оценок необходима непосредственная оценка модели на исторических данных.

2.3.2 Малаховская О.А. «*Are commodity price shocks important? A Bayesian estimation of a DSGE model for Russia*».

Данная модель также разделяет экономику на секторы, связанные с производителями, домохозяйствами, внешний сектор, центральный банк.

В отличие от модели Полбина, в ней нет деления на торгуемые и неторгуемые товары. Есть деление отечественных товаров на те, что потребляются внутри страны и идут на экспорт. На экспорт идут *commodities* (в том числе и нефть), цена на нефть задана AR-процессом, таким образом вводится шок на цены на нефть. Фирмы же не разделяются на те, которые производят торгуемые или неторгуемые товары.

Центральный банк использует правило Тейлора для проведения монетарной политики.

В модели присутствуют следующие шоки:

- на технологию
- на процентную ставку
- обменный курс
- инфляцию
- количество произведенного товара
- цену на нефть

В отличие от предыдущей модели, параметры оцениваются Байесовским методом, таким образом оценка параметров учитывает исторические данные, что является ее преимуществом.

Автор строит импульсные отклики, которые согласуются с представлениями о том, как должны вести себя те или иные переменные при реализации тех или иных шоков.

3 Модель

3.1 Задача потребителя

Репрезентативный потребитель решает задачу по максимизации ожидаемой дисконтированной полезности, выбирая, сколько потреблять и сколько работать в каждом периоде:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln(C_t) - \xi_t \frac{L_t^{1+\varphi}}{1+\varphi} \right] \quad (4)$$

где φ^{-1} - эластичность предложения труда по реальной зарплате, ξ_t - шок предложения труда.

В экономике присутствует три типа товаров: домашний (D), иностранного производства (F) и нефтепродукты (Oil). Считается, что экономика-экспортер нефти не импортирует нефть, поэтому домашние товары и товары иностранного производства относятся к нефтяным товарам (Non-Oil).

Потребление распределено между нефтепродуктами и остальными товарами (не нефтепродуктами), C_t - CES (constant elasticity of substitution)-агрегированное потребление нефтяных и нефтяных товаров:

$$C_t = \left[\gamma^{\frac{1}{\rho}} (C_{Oil,t})^{\frac{\rho-1}{\rho}} + (1-\gamma)^{\frac{1}{\rho}} (C_{Non-Oil,t})^{\frac{\rho-1}{\rho}} \right]^{\frac{\rho}{\rho-1}} \quad (5)$$

где $C_{Oil,t}$ - потребление нефтяных продуктов, $C_{Non-Oil,t}$ - потребление нефтяных продуктов, ρ - эластичность замещения между нефтепродуктами и остальными товарами.

$C_{Non-Oil,t}$, в свою очередь, является CES-агрегированным потреблением домашних товаров ($C_{H,t}$) и товаров заграничного производства ($C_{F,t}$):

$$C_{Non-Oil,t} = \left[\lambda^{\frac{1}{\mu}} (C_{H,t})^{\frac{\mu-1}{\mu}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{\mu}} (C_{F,t})^{\frac{\mu-1}{\mu}} \right]^{\frac{\mu}{\mu-1}} \quad (6)$$

где μ - эластичность замещения между товарами заграничного производства и до-

машинными товарами.

Потребитель минимизирует стоимость потребительской корзины, состоящей из нефтепродуктов и нефтефтяных товаров с учетом своих предпочтений. Т.о. он минимизирует $P_{Oil,t} * C_{Oil,t} + P_{Non-Oil,t} * C_{Non-Oil,t}$ с учетом уравнения (5). $P_{Oil,t}, P_{Non-Oil,t}$ цены нефтепродуктов и агрегированная цена нефтефтяных товаров (дефлятор потребления нефтефтяных товаров).

Решением задачи минимизации стоимости потребительской корзины является спрос на на нефтепродукты и нефтефтяные товары:

$$C_{Non-Oil,t} = (1 - \gamma) \left(\frac{P_{Non-Oil,t}}{P_t} \right)^{-\rho} C_t, \quad C_{Oil,t} = \gamma \left(\frac{P_{Oil,t}}{P_t} \right)^{-\rho} C_t \quad (7)$$

Аналогично спрос на домашние товары и товары зарубежного производства определяется:

$$C_{H,t} = \lambda \left(\frac{P_{H,t}}{P_{Non-Oil,t}} \right)^{-\mu} C_{Non-Oil,t}, \quad C_{F,t} = (1 - \lambda) \left(\frac{P_{F,t}}{P_{Non-Oil,t}} \right)^{-\lambda} C_{Non-Oil,t} \quad (8)$$

Бюджетное ограничение для потребителя выглядит следующим образом:

$$P_t C_t + \frac{\varepsilon_t B_{F,t}}{(1 + i_t^*) \Psi(\cdot)} + \frac{B_{H,t}}{1 + i_t} \leq \varepsilon_t B_{F,t-1} + B_{H,t-1} + W_t L_t + \Pi_t \quad (9)$$

где $\Psi(\cdot)$ - премия за риск, ε - обменный курс, $B_{H,t}$ - чистые заимствования в домашней валюте по отношению к государству, $B_{F,t}$ - чистые заимствования в иностранной валюте по отношению к иностранцам в иностранной валюте.

Условия первого порядка задачи максимизации (4) с учетом бюджетного ограничения (9):

$$L_t^\phi \xi_t = \frac{W_t}{C_t P_t} \quad (10)$$

- задает предложение труда при заданном уровне заработной платы.

Уравнения Эйлера:

$$E_t \left[\beta(1 + i_t) \frac{P_t C_t}{P_{t+1} C_{t+1}} \right] = 1 \quad (11)$$

$$E_t \left[\beta(1 + i_t^*) \Psi(\cdot) \frac{\varepsilon_{t+1} P_t C_t}{\varepsilon_t P_{t+1} C_{t+1}} \right] = 1 \quad (12)$$

3.2 Задача фирмы

3.3 Фирмы-производители домашних товаров

Домашние фирмы используют для производства труд и нефтепродукты. Производственная функция описывается следующим уравнением:

$$F_{H,t}(L_{H,t}, Oil_{H,t}) = A_{H,t} \left[(1 - \alpha)^{\frac{1}{\omega}} L_{H,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} + \alpha^{\frac{1}{\omega}} Oil_{H,t}^{\frac{\omega-1}{\omega}} \right]^{\frac{\omega}{\omega-1}} \quad (13)$$

ω определяет эластичность замещения между трудом и нефтепродуктами в производстве.

Выбирая количество труда и нефтепродуктов, используемых в производстве, фирма максимизирует прибыль:

$$F_{H,t}(L_{H,t}, Oil_{H,t}) - Oil_{H,t} P_{Oil,t} - L_{H,t} W_{H,t} \rightarrow maximize \quad (14)$$

Из условий первого порядка следует:

$$\left(\frac{P_{Oil,t}}{W_{H,t}} \right)^{\omega} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{L_{H,t}}{Oil_{H,t}} \quad (15)$$

Прибыль фирмы:

$$\Pi_{H,t} = P_{H,t} Y_{H,t} - W_{H,t} L_{H,t} - P_{Oil,t} Oil_{H,t} \quad (16)$$

3.4 Жесткость цен, или как фирмы устанавливают цены

Из установки домашними фирмами цен а-ля Кальво выводится новая кейнсианская кривая Филлипса.

3.5 Внешний сектор

Внешний сектор предъявляет спрос на товары домашнего производства и на нефтепродукты, экспортером которых является экономика. Индекс (*) относится к внешнему сектору. C_t^* - внешний спрос на все товары, в т.ч. на нефтепродукты и товары домашнего производства.

$P_{F,t}^*$ принимается равным P_t^* , так как домашняя экономика пренебрежимо мала по сравнению с внешним сектором, а значит, доля домашних цен в агрегаторе цен во внешней экономике тоже пренебрежимо мала.

Спрос внешнего сектора на товары домашнего производства:

$$C_{H,t}^* = \nu_H^* \left(\frac{P_{H,t}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{-\delta^*} C_t^* \quad (17)$$

где ν_H^* - доля товаров домашнего производства во внешнем спросе.

Спрос внешнего сектора на нефтепродукты:

$$C_{Oil,t}^* = \nu_{Oil}^* \left(\frac{P_{Oil,t}^*}{P_{F,t}^*} \right)^{-\delta^*} C_t^* \quad (18)$$

где δ - эластичность замещения между разными товарами во внешней экономике (агрегированный спрос внешнего сектора - CES-функция).

В предположении, что для домашних фирм отсутствует арбитраж между ценами на разных рынках, должно выполняться:

$$P_{H,t}^* \varepsilon_t = P_{H,t} \quad (19)$$

По определению реального обменного курса:

$$RER_t = \frac{\varepsilon_t P_t^*}{P_t} = \frac{\varepsilon_t P_{F,t}^*}{P_t} \quad (20)$$

$P_{F,t}^*$ - цены товаров, произведенных внешним сектором, выраженные в иностранной валюте.

Так как должен выполняться закон единой цены:

$$\frac{P_{Oil,t}}{P_t} = RER_t \frac{P_{Oil,t}^*}{P_{F,t}^*} \zeta_t \quad (21)$$

где ζ - параметр отклонения от закона единой цены, который задается следующим авторегрессионным процессом:

$$\zeta_t = \rho_\zeta \zeta_{t-1} + \varepsilon_t^\zeta, \quad \varepsilon_t^\zeta \sim N(0, \sigma_\zeta) \quad (22)$$

3.6 Общее равновесие

- Равновесие на рынке труда:

$$L_t = L_{H,t}$$

- Равновесие на рынке товаров домашнего производства:

$$Y_{H,t} = C_{H,t} + C_{H,t}^*$$

- Платежный баланс:

$$\frac{\varepsilon_t B_t^*}{(1+i_t^*)\Psi(\cdot)} - \varepsilon_t B_{t-1}^* = P_{Ex,t} * Ex_t - P_{Im,t} * Im_t$$

$$P_{Im,t} * Im_t = C_{F,t} P_{F,t}^* \varepsilon_t$$

$$P_{Ex,t} * Ex_t = C_{H,t}^* P_{H,t} + P_{oil,t} * Oil_t$$

- ВВП:

$$P_{Y,y} Y_t = P_t C_t + P_{X,t} * Ex_t - P_{Im,t} * Im_t$$

3.7 Монетарная политика

Правило Тейлора:

$$\hat{i}_t = \delta_\pi \hat{\pi}_t + \delta_y \hat{y}_t + \kappa_t$$

Список литературы

- [1] Полбин А.В. «Построение динамической стохастической модели общего равновесия для российской экономики».
- [2] Малаховская О.А. «*Are commodity price shocks important? A Bayesian estimation of a DSGE model for Russia*».
- [3] Kydland and Prescott (1982). *Time to build and aggregate fluctuations*. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1982 - JSTOR
- [4] Long and Plosser (1983). *Real business cycles*. *Journal of political Economy*, 1983 - journals.uchicago.edu
- [5] Prescott (1986). *Theory ahead of business-cycle measurement*. Carnegie-Rochester conference series on public policy, 1986
- [6] Aiyagari, Christiano, Eichenbaum (1992). *The output, employment, and interest rate effects of government consumption*.
- [7] Baxter and King (1993). *Fiscal policy in general equilibrium*.
- [8] Calvo (1983). *Staggered prices in a utility-maximizing framework*.
- [9] Taylor, John B. (1993). "Discretion versus Policy Rules in Practice". Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy. 39: 195-214.
- [10] Blanchard and Kahn (1980). "The solution of linear difference models under rational expectations". *Econometrica* 48, 305-311

- [11] Sims (2002). *"Solving linear rational expectations models"*. Computational Economics 20, 1-20
- [12] Uhlig (1997). *"A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily"*.
- [13] R. E. Kalman, 1960. *"A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems"*.
- [14] B. Bernanke, J. Boivin, P. Elias, 2005. *"Measuring the effects of monetary policy: a factor-augmented vector autoregressive (FAVAR) approach"*. The Quarterly Journal of Economics, February 2005.