

Тема 4. Основные результаты, полученные при анализе модели общего экономического равновесия вальрасова типа (Эрроу-Дебре-Маккензи)

Численные примеры

1. Пусть экономика состоит из двух групп потребителей (A и B), каждая из которых потребляет два вида продуктов (№1 и №2) и обладает соответствующей функцией полезности: $U_A = x_1^{\frac{3}{4}} x_2^{\frac{3}{4}}$, $U_B = x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. Первоначальные запасы благ в данной экономике у этих групп составляют соответственно $\omega_1^A = 6$; $\omega_1^B = 6$; $\omega_2^A = 2$; $\omega_2^B = 4$.

Поскольку функции полезности в данной задаче имеют вид зависимостей Кобба-Дугласа, функции спроса на соответствующие товары для каждой группы потребителей задаются следующими соотношениями: $x_1^A = \frac{M_A}{2P_1}$, $x_2^A = \frac{M_A}{2P_2}$, $x_1^B = \frac{M_B}{2P_1}$, $x_2^B = \frac{M_B}{2P_2}$, где M_A и M_B – доходы двух групп потребителей.

Относительную цену первого продукта можно найти исходя из закона Вальраса, в соответствии с которым $\omega_1 = \frac{0,5(6P_1+2P_2)}{P_1} + \frac{0,5(6P_1+4P_2)}{P_1} = 12$; $\omega_2 = \frac{0,5(6P_1+2P_2)}{P_2} + \frac{0,5(6P_1+4P_2)}{P_2} = 6$. Каждое из двух предыдущих равенств дает $\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{2}$.

Отсюда можно получить конечное распределение продуктов между потребителями: $x_1^A = 5$, $x_2^A = 2,5$; $x_1^B = 7$, $x_2^B = 3,5$.

Выведем уравнение линии контрактов. Для этого рассчитаем предельные нормы замещения первого и второго продуктов:

$$MRS_A = \frac{MU_1^A}{MU_2^A} = \frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{p_1}{p_2}, \quad MRS_B = \frac{MU_1^B}{MU_2^B} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Кроме того, из данных о первоначальных запасах для каждой из групп потребителей известно, что запасы первого продукта в данной экономике составляют 12 ед., а второго – 6 ед. Поэтому для данной экономики справедливы следующие соотношения между затратами продуктов двух групп: $x_1^B = 12 - x_1^A$, $x_2^B = 6 - x_2^A$. Из данных условий получаем отношения между объемами потребления продуктов:

$$\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{6 - x_2^A}{12 - x_1^A}, \quad \text{откуда следует уравнение линии контрактов: } x_2^A = 0,5x_1^A.$$

Ее график будет диагональю в прямоугольнике Эджуорта (рис.1).

В силу линейности линии контрактов состояние общего экономического равновесия в потреблении имеет существенную особенность: относительная цена первого товара равна 0,5 независимо от первоначального распределения запасов товаров между

потребителями: $\frac{x_2^A}{x_1^A} = \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{1}{2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Выведем теперь уравнение потребительных возможностей (границу доступных полезностей) общества. Используя уравнение линии контрактов, получаем соотношение для объемов потребления второго товара индивидуумом A :

$$U_A = (x_1^A)^{\frac{3}{4}} (x_2^A)^{\frac{3}{4}} = (x_1^A)^{\frac{3}{4}} (2x_2^A)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} (x_2^A)^{\frac{3}{4}}; \quad x_2^A = \frac{(U_A)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}}.$$

Тогда уровень полезности B следующим образом выражается через уровень полезности A :

$$U_B = (12 - x_1^A)^{\frac{2}{3}} (6 - x_2^A)^{\frac{2}{3}} = (12 - 2x_2^A)^{\frac{2}{3}} (6 - x_2^A)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} (6 - x_2^A)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{4} \left(6 - \frac{(U_A)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Рисунок 1. Пример линии контрактов.

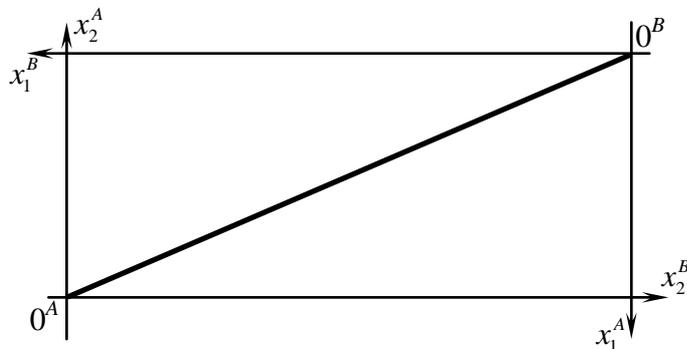
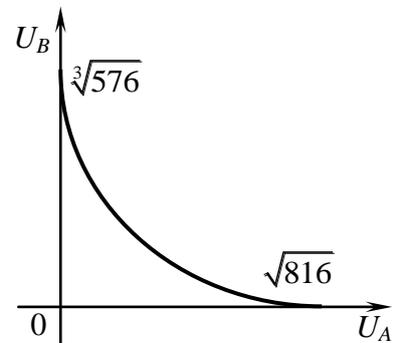


Рисунок 2. Пример границы доступных полезностей.



На рис.2 построена граница доступных полезностей. Первая ее производная – отрицательная, значит, зависимость – убывающая. Вторая производная при любых возможных значениях полезности потребителя А положительна, следовательно, зависимость является выпуклой (вниз). Точки пересечения с осями координат соответствуют максимально возможным величинам полезности каждого из потребителей в ситуации, когда соответствующему индивидууму будут принадлежать все запасы обоих товаров.

2. Пусть экономика состоит из двух групп производителей, каждая из которых производит продукт определенного вида – X или Y – с использованием таких факторов производства, как труд L и капитал K. Производственные функции каждой из групп производителей имеют вид: $X = L_X^{\frac{1}{3}} K_X^{\frac{2}{3}}$, $Y = L_Y^{\frac{2}{5}} K_Y^{\frac{3}{5}}$. Первоначальные запасы труда и капитала в данной экономике у этих групп составляют соответственно $K_X=2$, $L_X=6$, $K_Y=4$, $L_Y=6$. Выведем уравнение кривой производственных возможностей. Для этого рассчитаем предельные нормы технологического замещения капитала трудом в производстве ресурсов X и Y: $MRTS_X = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K_X}{L_X} = \frac{P_L}{P_K}$, $MRTS_Y = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K_Y}{L_Y} = \frac{P_L}{P_K}$.

Кроме того, из ресурсных ограничений для каждой из групп производителей известно, что запасы труда в данной экономике составляют 12 ед., а капитала – 6 ед. Поэтому для данной экономики справедливы следующие соотношения между затратами капитала и труда двух групп: $K_Y=6-K_X$, $L_Y=12-L_X$. Из данных условий получаем отношения между затратами факторов производства: $\frac{K_X}{L_X} = \frac{K_Y}{L_Y} = \frac{6-K_X}{12-L_X}$, откуда следует уравнение производственных контрактов: $K_X=0,5L_X$.

Ее график будет диагональю в прямоугольнике Эджуорта (рис.3). Предельная норма технологического замещения капитала трудом равна тангенсу угла наклона линии, проведенной через точки касания двух изоквант. Она одинакова во всех точках линии производственных контрактов: $MRTS=0,5$. Относительная ставка заработной платы равна: $\frac{P_L}{P_K} = \frac{K_X}{L_X} = \frac{K_Y}{L_Y} = MRTS_{LK}$. Итак, если арендная цена капитала равна единице, то значение ставки заработной платы составит 0,5.

Поскольку производственные функции в данной задаче имеют вид зависимостей Кобба-Дугласа, функции спроса на капитал и труд для каждой группы производителей задаются следующими соотношениями: $K_X = \frac{TC_X}{2P_K}$, $K_Y = \frac{TC_Y}{2P_K}$, $L_X = \frac{TC_X}{2P_L}$, $L_Y = \frac{TC_Y}{2P_L}$, где M_X и M_Y – доходы двух групп производителей.

Если цена капитала равна единице, то функции спроса на этот фактор производства принимают вид: $K_X=0,5TC_X$, $K_Y=0,5TC_Y$.

Величину издержек производства можно найти исходя из первоначальных запасов факторов у производителей: $TC_X=2P_K+6P_L=2+6P_L=5$, $TC_Y=4P_K+6P_L=4+6P_L=7$.

Отсюда можно получить конечное распределение ресурсов у производителей: $K_X^*=2,5$, $L_X^*=5$, $K_Y^*=3,5$, $L_Y^*=7$.

Ставку заработной платы можно также найти исходя из закона Вальраса, в соответствии с которым $K = 0,5(2P_K + 6P_L) + 0,5(4P_K + 6P_L) = 6$; $L = \frac{0,5(2P_K+6P_L)}{P_L} + \frac{0,5(4P_K+6P_L)}{P_L} = 12$. Каждое из данных соотношений дает $P_L=0,5$, поскольку P_K , по предположению, равна 1.

Выведем теперь уравнение производственных возможностей общества. Используя уравнение линии контрактов, получаем соотношение для затрат капитала производителем X: $X = L_X^{\frac{1}{3}} K_X^{\frac{1}{3}} = K_X^{\frac{1}{3}} (2K_X)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}} K_X^{\frac{2}{3}}$, то есть $K_X = \frac{X^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}$. Тогда объем производства Y следующим образом выражается через объем производства X:

$$Y = (12 - L_X)^{\frac{2}{5}} (6 - K_X)^{\frac{2}{5}} = (12 - 2K_X)^{\frac{2}{5}} (6 - K_X)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4} \left(6 - \frac{X^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{4}{5}}.$$

На рис.4 построена граница производственных возможностей общества. Ее первая и вторая производные отрицательны при любых возможных значениях X, что свидетельствует о необходимости отказа от выпуска некоторого количества Y при увеличении производства X и при этом о росте соответствующих альтернативных издержек. Точки пересечения границы производственных возможностей с осями координат показывают максимально возможные объемы выпуска благ в том случае, если все ресурсы будут находиться в собственности соответствующего производителя.

Рисунок 3. Пример линии контрактов

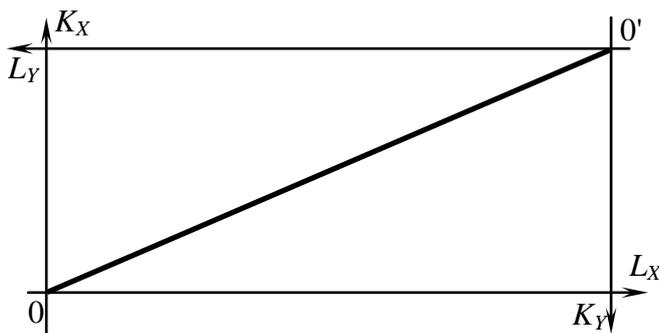


Рисунок 4. Пример границы производственных возможностей общества

