

Тема 2. Существование и основные характеристики решений задач оптимизации производства и потребления в статике

Численные примеры

Пусть, производственная функция конкурентной фирмы задана в виде $Q = K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}$, где K и L - объемы используемых капитала и труда соответственно. В пунктах 1-2 предполагается, что рыночные цены труда и капитала соответственно составляют 32 и 2 (денежные единицы).

1. Выведите: а) траекторию развития фирмы; б) функции условного спроса на труд и капитал; в) функции долгосрочных общих, средних и предельных издержек производства.

Равенство отношений предельных продуктов и цен на факторы задает траекторию развития предприятия: $K = \frac{p_L}{2p_K}L = 8L$.

Подставляя траекторию развития фирмы в производственную функцию, получаем условный спрос на хозяйственные факторы: $L = \left(\frac{2p_K}{p_L}\right)^{\frac{1}{3}}Q^{\frac{4}{3}} = 0,5Q^{\frac{4}{3}}$; $K = \left(\frac{p_L}{2p_K}\right)^{\frac{2}{3}}Q^{\frac{4}{3}} = 4Q^{\frac{4}{3}}$.

Подставляя функции условного спроса в выражение себестоимости продукции, получаем функцию издержек производства: $TC = p_K K + p_L L = \frac{3}{2^{\frac{2}{3}}}p_K^{\frac{1}{3}}p_L^{\frac{2}{3}}Q^{\frac{4}{3}} = 24Q^{\frac{4}{3}}$. Соответственно, средние и предельные издержки производства будут описываться следующими функциональными зависимостями: $AC = 24Q^{\frac{1}{3}}$, $MC = 32Q^{\frac{1}{3}}$.

2. Выведите функцию предложения продукции данным предприятием, максимизирующим прибыль в условиях совершенной конкуренции.

Используя функцию предельных издержек в необходимом условии максимизации прибыли, получаем функцию предложения продукции: $p = MC = 32Q^{\frac{1}{3}}$. Отметим, что данная функция будет работать при любом неотрицательном объеме производства, поскольку минимум средних издержек, необходимый для существования фирмы в долгосрочной перспективе, достигается в нуле.

Рассчитаем оптимальный объем производства, если цена на выпускаемую продукцию равна 64: $q=8$.

3. Пусть ставки заработной (w) и арендной (r) платы являются переменными величинами, и функции предложения капитала и труда для данной отрасли соответственно имеют вид: $w = L^{\frac{5}{2}}$, $r = K^{\frac{5}{4}}$. а) Выведите функцию долгосрочного предложения конкурентной отрасли, в которой работает 256 фирм.

Подставляя функции предложения капитала и труда для данной отрасли в функции условного спроса на труд и капитал, с учетом того, что отраслевой спрос на данные факторы производству пропорционален индивидуальному – предъявляемому отдельной фирмой ($L = 256L_i$, $K = 256K_i$), получаем систему:

$$\begin{cases} K_i = \frac{256^{\frac{5}{6}} L_i^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{5}{3}} K_i^{\frac{5}{6}}} q_i^{\frac{4}{3}}, \\ L_i = \frac{2^{\frac{1}{3}} K_i^{\frac{5}{12}}}{256^{\frac{5}{12}} L_i^{\frac{5}{6}}} q_i^{\frac{4}{3}}. \end{cases}$$

Преобразуем ее, объединяя степени при соответствующих факторах в каждом из ра-

$$\text{венств: } \begin{cases} K_i^{11} = 2^{36} L_i^{10} q_i^8, \\ L_i^{11} = \frac{1}{2^{18}} K_i^{\frac{5}{2}} q_i^8; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} L_i = \frac{1}{2^{11}} K_i^{\frac{5}{22}} q_i^{\frac{8}{11}}, \\ K_i = 2^{\frac{36}{11}} L_i^{\frac{10}{11}} q_i^{\frac{8}{11}}. \end{cases}$$

Исключая труд и капитал из первого и второго равенств системы, приходим к функциям условного спроса со стороны фирмы на факторы производства с учетом влияния их

$$\text{предложения для данной отрасли: } L_i = \frac{q_i^{\frac{9}{8}}}{2^8}, K_i = 2^{\frac{9}{4}} q_i^{\frac{7}{4}}.$$

Подставляя их в выражение себестоимости продукции, получаем функцию долгосрочных издержек производства с учетом функций предложения труда и капитала:

$$\begin{aligned} TC_i &= p_K K_i + p_L L_i = (256 K_i)^{5/4} K_i + (256 L_i)^{5/2} L_i = 2^{10} K_i^{\frac{9}{4}} + 2^{20} L_i^{\frac{7}{2}} \\ &= 2^{20} \frac{q_i^{\frac{63}{16}}}{2^{16}} + 2^{10} 2^{\frac{81}{16}} q_i^{\frac{63}{16}} = 3 \cdot 2^{\frac{241}{16}} q_i^{\frac{63}{16}}. \end{aligned}$$

Дифференцируя ее по объему производства отдельной фирмы (q_i)

$$p = MC_i = 3 \frac{63}{16} 2^{\frac{241}{16}} q_i^{\frac{47}{16}}$$

и учитывая пропорциональность рыночного и индивидуального объема выпуска ($Q = 256 q_i$, или $q_i = \frac{Q}{2^8}$), получаем искомую функцию долгосрочного отраслевого предложения: $p = \frac{189}{2^{16}} Q^{\frac{47}{16}}$.

Рассчитайте равновесный объем производства фирмы и отрасли, если рыночный спрос на выпускаемую продукцию описывается зависимостью $p = \frac{63}{2^8 Q^{16}}$:

$$p = \frac{189}{2^{16}} Q^{\frac{47}{16}} = \frac{63}{2^8 Q^{16}}; Q = \frac{2^{\frac{193}{64}}}{4\sqrt{3}}; q_i = \frac{1}{2^{\frac{319}{64}} 4\sqrt{3}}.$$