Вереникин А.О.

Общее экономическое равновесие в условиях возрастающей отдачи от масштабов производства.

(Вестник Московского университета. Серия 6. Экономика. 2004. №5)

В последние годы в нашей стране происходит трансформация от ситуации устойчивого спада в балансирующее состояние, в котором необходимо перейти от колебательных процессов к экономическому равновесию, а после этого в перспективе – добиться устойчивого роста. В настоящее время актуальным является, прежде всего, достижение общего экономического равновесия, которое означает стабильность и сбалансированность, а, значит, предсказуемость экономики. В этом случае существует возможность реального управления такой равновесной экономической системой. В связи особый интерес вызывают, казалось бы, чисто теоретические проблемы условий существования общего экономического равновесия. Ряд фундаментальных вопросов встают перед теорией и в свете глобальных процессов социально-экономической трансформации. К числу таких проблем относится *вопрос о существовании общего экономического равновесия в условиях возрастающей отдачи от масштаба производства*.

Для производственной функции свойственна постоянная отдача от масштаба, если увеличение затрат факторов производства в какое-то число раз α, $\alpha\in\mathbf{R}$, α>1, приведет к росту объема производства в такое же число раз α. Положительный эффект масштаба имеет место, когда одинаковое увеличение количества всех используемых факторов производства – в α, $\alpha\in\mathbf{R}$, α>1, раз – дает рост объема производства в большей пропорции по сравнению с затратами ресурсов – больше, чем в α раз. Аналогично, если при увеличении объемов затрачиваемых ресурсов в α, $\alpha\in\mathbf{R}$, α>1, раз производство возрастет меньше, чем в α раз, то такая производственная функция характеризуется убывающей отдачей от масштаба. Итак, ситуация возрастающей отдачи от масштаба, одним из проявлений которой может рассматриваться специализация производства, описывается неравенством: $Q_i(\alpha x_i) > \alpha Q_i(x_i), \alpha\in\mathbf{R}, \alpha>1.$ (1)

Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется выпуклой, если в пространстве $\mathbf{R}\times X$ множество $\{(\alpha, x)\in\mathbf{R}\times X \mid \alpha \geq f(x), x\in A\}$, где $A=\{x\in X \mid f(x)<+\infty\}$ – то есть ее надграфик – является выпуклым множеством. При этом множество X называется выпуклым, если для любых векторов x_1, x_2 из X любой вектор x, лежащий на соединяющем их отрезке, также принадлежит этому множеству: из того, что x_1, $x_2 \in X$, следует, что $x \in X$, где $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, $\alpha\in[0,1]$. Функция $f: X \to \mathbf{R}$ называется строго выпуклой, если из того, что для всех (α, x_1), (α, x_2) из пространства $\mathbf{R}\times X$ таких, что $\alpha \geq f(x_i)$, $x_i \in A$, i=1,2; следует, что $(\alpha, x)\in \mathbf{R}\times X$, где $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, $\alpha\in[0,1]$ (рис.1).

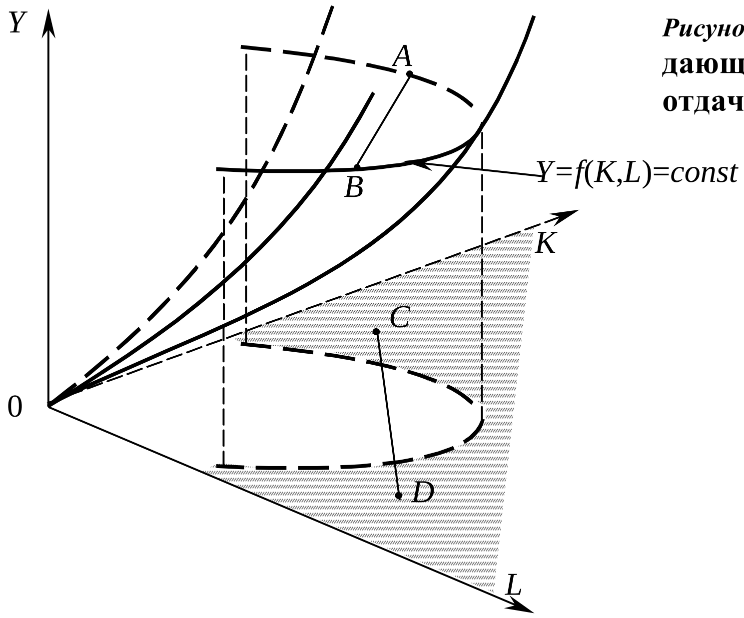

Рисунок **1. Выпуклая функция, обладающая свойством возрастающей отдачи от масштаба производства.**

Функция $\left(f : X \to \mathbf{R}\right)$ называется (строго) вогнутой, если противоположная ей по знаку функция $\left(-f : X \to \mathbf{R}\right)$ является (строго) выпуклой[1]. Вогнутость производственной функции эквивалентна выпуклости ее “подграфика”, то есть технологического множества. Вогнутые функции, в частности такие, которые изображены на рис.2-3 не обладают свойством возрастающей отдачи от масштаба производства. Если двухфакторную производственную функцию, обладающую свойством вогнутости, обозначить через $Q(K,L)$, взяв в качестве ее аргументов такие факторы производства, как рабочую силу (L) и рабочие места (K), то для нее будет справедливо соотношение:

$$Q(\alpha K_1+(1-\alpha)K_2, \alpha L_1+(1-\alpha)L_2) \geq \alpha Q(K_1,L_1)+(1-\alpha)Q(K_2,L_2), \qquad (2)$$

где $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha\in(0,1)$. Для производственной функции в силу ее технико-экономического смысла также вводится предпосылка, которую общеизвестна как отсутствие “рога изобилия”[2], смысл которой состоит в том, что если производитель не использует ресурсов ($K=L=0$), то он не выпускает никакой продукции ($Q(K,L)=0$). В таком случае, если положить $K_2=L_2=0$ в (2), то получается: $Q(\alpha K_1,\alpha L_1)\geq\alpha Q(K_1,L_1)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha\in(0,1)$. (3)

Это означает, что из вогнутости производственной функции следует невозрастающая отдача от масштаба: $Q(\beta K, \beta L) \leq \beta Q(K,L)$, $\beta\in\mathbf{R}, \beta>1$. (4)

На рис.2 в качестве примера графика функции с убывающей отдачей от масштаба используется вогнутая функция полезности Кобба-Дугласа, например, это может быть $U=x_1^{1/2}x_2^{1/4}$. Ее график имеет вид “горки”. На рис.3 показан случай нарушения вогнутости: отрезки, соединяющие соответственно точки A_1 и B_1, A_2 и B_2, не принадлежат “подграфику” функции.

---

[1] Здесь и далее будем обозначать через $\mathbf{R}_+^n$ неотрицательнй ортант n-мерного пространства действительных чисел $\left(\mathbf{R}_+^n \equiv \{x \in \mathbf{R}^n, x \geq 0\}\right)$.

[2] Cockaigne (*англ.*) – сказочная страна изобилия и праздности.

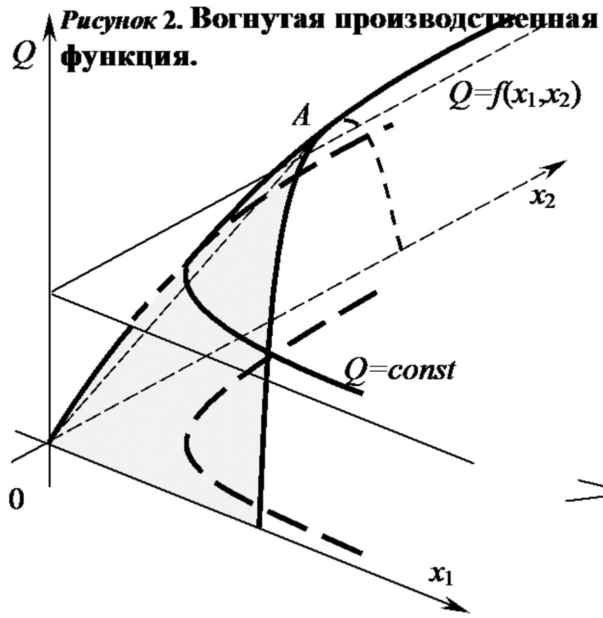

***Рисунок* 2. Вогнутая производственная функция.**

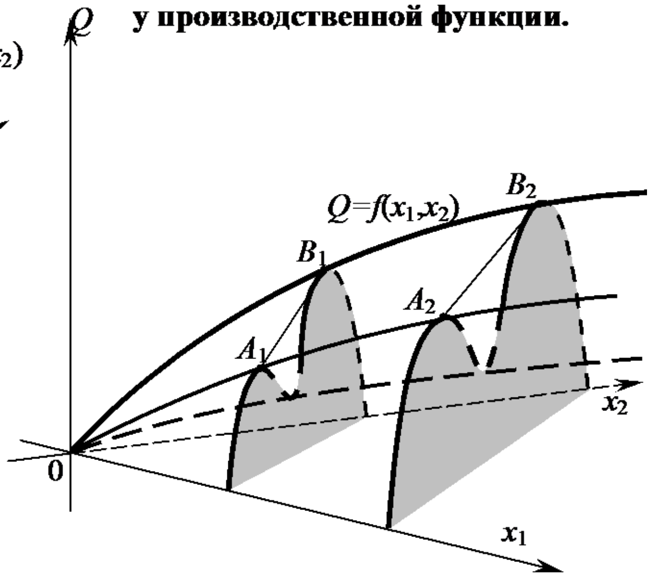

***Рисунок* 3. Отсутствие вогнутости у производственной функции.**

Итак, если функция вогнута, то рост затрат факторов производства в β раз не может давать увеличение объема производимой продукции больше, чем в β раз. Положительный эффект масштаба исключает вогнутость производственной функции. Если график производственной функции лежит всюду ниже внутренних точек отрезка, исходящего из начала координат и оканчивающегося на самом графике, то это подразумевает возрастание отдачи от масштаба, являющееся необходимым условием существования современной высокоразвитой экономики. Это гарантирует выпуклость производственной функции вдоль каждого луча, содержащего данные отрезки. Данному условию удовлетворяют как выпуклые – из определения которых ($Q(\alpha K_1+(1-\alpha)K_2,\alpha L_1+(1-\alpha)L_2)<\alpha Q(K_1,L_1)+(1-\alpha)Q(K_2,L_2)$, $\alpha\in(0,1)$) при отсутствии "рога изобилия" (Q=0, если K_2=L_2=0) следует возрастающая отдача от масштаба (1) – так и квазивогнутые функции, которые характеризуются возрастающей отдачей от масштаба производства.

Функция $Q: X \to \mathbf{R}$, где $X \subset \mathbf{R}^l$ является выпуклым множеством, называется строго квазивогнутой, если множество $\{x \in X | Q(x) \geq t, t \in \mathbf{R}\}$, является строго выпуклым. Другими словами, функция Q является строго квазивогнутой, если из того, что $Q(x_1)\geq t$ и $Q(x_2)\geq t$, следует, что $Q(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>t$ для любых $t\in\mathbf{R}$, $x_1\neq x_2$, $x_1,x_2\in X$, где X – выпуклое подмножество $\mathbf{R}^l$, $\alpha\in(0,1)$. Из данного определения следует, что функция U является строго квазивогнутой, если и только если $Q(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)>\min\{Q(x_1),Q(x_2)\}$ для любых $x_1,x_2 \in X$, $\alpha\in(0,1)$. Примером графика квазивогнутой производственной функции с возрастающей отдачей от масштаба, которая содержит в себе возможность кооперации в специализированной экономике, может служить колоколообразная технология с седловой точкой в нуле (рис.4).

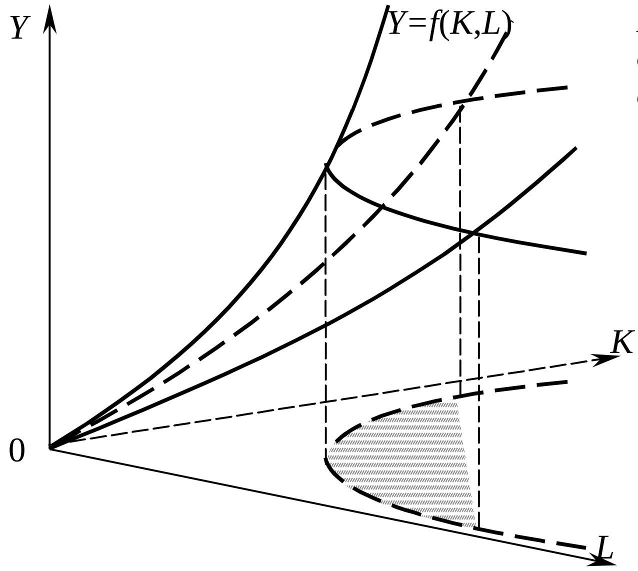

Рисунок **4. Квазивогнутая функция, обладающая свойством возрастающей отдачи от масштаба производства.**

Вогнутые функции полезности обязательно одновременно обладают характеристикой квазивогнутости. Ведь, если функция (Q:X→**R**) вогнута, то множество $\left\{x \in X \middle| Q(x) > t, t \in \mathbf{R}\right\}$ обязательно должно быть выпуклым. Если вогнутость функции нарушается, как, например, на рис.3, то не выполняется и свойство квазивогнутости. Обратное, вообще говоря, неверно: квазивогнутая функция не обязана быть вогнутой. Итак, *квазивогнутые отображения* являются обобщением вогнутых функций не только в математическом, но и в экономическом смысле, поскольку они *допускают возможность не только убывания, но и возрастания отдачи от масштаба*.

Особенности математических характеристик квазивогнутых производственных функций содержат в себе следующий экономический смысл. Строгая выпуклость по координатам, означает специализацию производителей, функционирующих в экономике. Строгая выпуклость линий уровня производственной функции отражает экономический "эффект дополнительности" факторов производства, который состоит в том, что комбинирование специализированных ресурсов будет давать больший прирост выпуска продукции, по сравнению с использованием специализированный, но не кооперированных факторов производства.

Кооперация производителей, использующих специализированные ресурсы, позволяет добиться выигрыша в эффективности хозяйствования. В хозяйственной практике широко распространена специализация предприятий на выпуске отдельных механизмов или агрегатов, используемых при изготовлении конечной продукции. Сборка же выделяется в отдельное производство. При этом удается получить значительный прирост выпуска готовой продукции, не прибегая к большим капиталовложениям. Это близко понятию субаддитивности издержек. Во многом именно кооперативные взаимодействия владельцев специализированного человеческого капитала порождают данный "эффект дополнительности" факторов производства.

У выпуклой функции, изображенной на рис.2, отсутствует свойство квазивогнутости, потому что не является выпуклой область на плоскости KOL, для которой объем выпуска превышает уровень, зафиксированный конкретной изоквантой (Y>const). Эта область на рис.2 заштрихована. Она невыпукла, поскольку отрезок, соединяющий, например, точки C и D этой области, не принадлежит ей целиком. В отличие от квазивогнутой, выпуклая функция не обеспечивает возможность кооперации специализированных производителей, поскольку варианты организации хозяйственной деятельности, соответствующие комбинированному использованию специализированных ресурсов –

внутренние точки отрезка [*AB*] – лежат выше ее графика и не достижимы в рамках данной технологии.

Основоположником анализа общего экономического равновесия является Л. Вальрас, который задал лейтмотив, общее направление исследований и приблизился к постановке проблемы. В законченном виде как цельная теория он сформировался в работах Л.В. Маккензи[3], К.Дж. Эрроу и Дж. Дебре[4] в середине XX века. Экономика в модели общего экономического равновесия Эрроу–Дебре–Маккензи[5] рассматривается как конгломерат хозяйствующих субъектов, классифицируемых на m групп потребителей и n – производителей. Пусть индекс j, обозначающий номер каждого производителя, пробегает значения от 1 до n (i=1,…,n). Допустим, далее, что в экономике существуют l видов благ, то есть продуктов и услуг. Индекс, соответствующий каждому из товаров, обозначим через h, h=1,…,l. Пусть каждый из h ресурсов покупается данным производителем по цене p_h. В модели предполагается, что каждый производитель максимизирует прибыль, или стоимость чистого выпуска, при заданной системе цен $\left(p \in \mathbf{R}^{l}\right)$:

$$\max_{y_{jh}}\left(\sum_{h=1}^{l} p_h y_{jh}\right); \tag{5}$$

где $p_h, y_h \in \mathbf{R}_+$; $p_h \neq 0$; y_{ih} – это объем выпуска товара h за вычетом его внутрипроизводственного потребления (h=1,…,l; j=1,…,n). Он является отрицательным числом, если это ресурс, и положительным числом, если это продукт.

В теории общего экономического равновесия каждый из индивидуумов, Которых будем нумеровать индексом i, i = 1, …, m, максимизирует функционал предпочтений $\left(U_i(x_i)\right)$ на множестве потребительских наборов $\left(x_i = \{x_{ih}\}_{h=1}^{l}\right)$ из $\mathbf{R}_+^{l}$ $\left(x_{ih} \in \mathbf{R}_+\right)$:

$$\max_{x_i} U_i(x_i),\ i = 1,...,m. \tag{6}$$

Доказанная Д. Дебре теорема утверждает, что, если функция потребительских предпочтений представляет собой отношение полного предпорядка, то есть множество X качественно сравнимых наборов благ, которое должно быть замкнутым подмножеством пространства действительных чисел $\left(\mathbf{R}^{l}\right)$, является полностью предупорядоченным, и в добавление к этому данный функционал качества обладает свойством непрерывности ($\forall x \in X$ множества $\{ y \in X : y \succsim x \}$ и $\{ y \in X : x \succsim y \}$ замкнуты относительно X), то ему соответствует непрерывная количественная, числовая функция полезности [11, с.55-59; **4**, с.319]. Для упрощения формальных выкладок на основе данной теоремы, использующей закон перехода количественных изменений в качественные, в нашем анализе порядковая функция потребительских предпочтений будет сводиться к своему числовому аналогу, принимающему значения в поле действительных чисел $\left(U : \mathbf{R}_+^{l} \rightarrow \mathbf{R}_+\right)$.

В рамках модели общего равновесия Эрроу–Дебре задается первоначальное распределение натуральных количеств благ между потребителями (ω_{hi}). Эти натуральные запасы товаров у экономических агентов, помноженные на цены благ, дают изначальное распределение доходов между ними. При этом конечный вектор потребления каждого экономического агента формируется с помощью купли-продажи первоначального запаса благ, а также за счет перераспределения прибыли производителей, поскольку

[3] McKenzie L.W. On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems // Econometrica, 1954, №1.
[4] Arrow K.J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. – В сб. [9]. – Т.2, с.58-91.
[5] В дальнейшем для краткости будем называть ее моделью Эрроу–Дебре.

потребители владеют ресурсами и контролируют производителей, распределяя между собой их прибыль:
$$\sum_{h=1}^{l} p_h x_{ih} \le \sum_{h=1}^{l} p_h \omega_{ih} + \sum_{j=1}^{l} \theta_{ij} \left[\sum_{h=1}^{l} p_h y_{jh} \right], \tag{7}$$
где θ_{ij} – доля i-го потребителя в прибыли, или чистом доходе, j-го производителя; причем $\theta_{ij} \ge 0$, $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$; $j = 1,...,n$; $h = 1,...,l$.

К.Дж. Эрроу и Дж. Дебре сформулировали и доказали *теорему существования общего экономического равновесия в сильной форме* [11,с.78-89]. Она устанавливает достаточные условия наличия в экономике (m+n+1)-мерного вектора $\left((x_i^*),(y_i^*),p^*\right)$, $x_i^*, y_i^*, p^* \in \mathbf{R}_+^l$ – такого, что $x_i^* = \{x_{ih}^*\}_{h=1}^{l} \in X_i$, $i = 1,...,m$ – решения задач (6), (7); $y_j^* = \{y_{jh}^*\}_{h=1}^{l} \in Y_j$, $j = 1,...,n$ – решения задач (5) при заданных ценах $\left(p^* = \{p_h^*\}_{h=1}^{l}\right)$, а в целом по экономике выполняется ограничение на физический, или натуральный, объем товарной массы: совокупное предложение $\left(\sum_{j=1}^{n} y_{jh}\right)$ вместе с суммарным первоначальным запасом благ $\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{hi} = \omega_h\right)$ точно покрывает совокупный спрос $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ih}\right)$ по каждому из товаров:
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ih} - \sum_{j=1}^{n} y_{jh} = \omega_h, \; h = 1,\ldots,l. \tag{8}$$

В той мере, в какой производительные силы вовлекаются в изучение неоклассикой, за рамками анализа остаются вопросы, связанные с развитием производственной сферы, сопровождающиеся переходом на новый технологический уровень и характеризуемые возрастающей отдачей от масштаба производства. Еще А. Маршалл в “Принципах экономической науки” писал: “Статическая теория равновесия служит лишь введением к экономическим исследованиям, причем она даже вряд ли является введением к изучению возникновения и развития производств, которые обнаруживают тенденцию возрастающей отдаче”[6] Несмотря на многочисленные усилия, со времен А. Маршалла вплоть до наших дней ученым-экономистам, придерживающимся “основного течения”, так и не удалось добиться построения равновесной системы цен с учетом возрастающей отдачи от масштаба производства, которая вытекает из фундаментальных процессов, связанных с воспроизводством человеческого капитала. В частности, К. Ланкастер формулирует тезис о неравновесности народного хозяйства в условиях возрастающей отдачи от масштаба производственной функции предприятий, функционирующих в данной экономике: “Если множество выпуска является аддитивным и указывает либо на слабое убывание, либо на постоянство эффективности при изменении масштаба производства, то оно выпукло… Выпуклость множества *Y* необходима, чтобы гарантировать существование равновесия в конкурентной экономике[7]. Отсутствие аддитивности (взаимодействие между производственными процессами) и возрастание эффективности при изменении масштаба производства противоречат выпуклости множества выпуска [**2**, с.152].”

Обращаясь ко взглядам классиков теории общего равновесия, можно увидеть, что они относились к гипотезе выпуклости и характеристике экономики как функционирующей в условиях невозрастающей и, более того, убывающей отдачи от масштаба как к ключевым условиям достижения общего равновесия. Так, Дж. Дебре пишет:

[6] Маршалл А. Принципы экономической науки: в 3-х т. М., 1993. Т.2, с.158.
[7] Под множеством *Y* здесь подразумевается производственное множество. – *А.В.*

“Допущение о выпуклости является ключевым в силу его роли во всех существующих доказательствах ряда фундаментальных теорем экономики[8]. Оно является ограничительным условием, поскольку исключает возможность[9] … возрастающей отдачи от масштаба[10]… [11, с.41]”

К.Дж. Эрроу и Ф. Хан приходят к аналогичным выводам о значении выпуклости и невозрастающей отдачи от масштаба в теории общего равновесия:

“Предположения о выпуклости производства … и предпочтений … играют ключевую роль в доказательстве существования конкурентного равновесия. Выпуклость влечет за собой непрерывность реакции фирм и домашних хозяйств на изменения цен; даже если происходит скачек (как в случае постоянной отдачи от масштаба производства фирмы), каждая точка внутри всего интервала между двумя крайними значениями, соответствующими этому скачку, является допустимой реакцией, так что отсутствуют разрывы, в которых могло бы возникнуть неравенство спроса и предложения… Поскольку существование равновесия при наличии невыпуклости не может быть гарантировано, стоит задаться вопросом, как приблизить экономику к равновесному состоянию при предположении о том, что фирмы максимизируют прибыль [**10**, с.169-170].”

Таким образом, одним из достаточных условий существования общего экономического равновесия современная экономическая теория полагает выпуклость множества $\{(\alpha, x) \in \mathbf{R} \times X | \alpha \le Q(x)\}$, расположенного под графиком производственной функции $Q : X \to \mathbf{R}_+$. Это означает, что производственная функция должна обладать свойством вогнутости, то есть противоположная ей по знаку функция должна быть выпукла. *Гипотеза выпуклости* производственного множества как неотрицательного ортанта или, что эквивалентно, предположение о вогнутости производственной функции традиционно играет важнейшую роль в исследовании общего равновесия.

Производственная функция, которая будет гарантировать существование в экономике общего равновесия должна обладать свойством невозрастающей отдачи от масштаба (рис.5). Дело в том, что в условиях научно-технологической революции с преобладанием неубывающего эффекта масштаба производства предприятие, максимизирующее прибыль, не может достигнуть цели своей экономической деятельности. В частности, если технология производства описывается функцией леонтьевского типа, то задача максимизации прибыли не имеет решения. Хотя выручка предприятия в данном случае растет линейно, разница между ее темпом роста и таким же, линейным увеличением издержек порождает потенциал нелимитируемого возрастания либо прибыли, либо убытков. Если же темпы роста выручки и издержек совпадают, то невозможно точно определить требуемый объем производства, поскольку любая его величина будет давать нулевую прибыль. Поэтому, если производственная функция характеризуется постоянной отдачей от масштаба, решение задачи максимизации прибыли отсутствует. В случае строго положительного эффекта масштаба, данная задача оказывается , тем более, неразрешимой, поскольку выручка предприятия увеличивается быстрее, чем линейно, а значит, заведомо обгоняет прирост издержек производства. Геометрическая иллюстрация отсутствия оптимального объема выпуска продукции и затрат ресурсов для предприятия, максимизирующего прибыль в условиях возрастающей отдачи от масштаба производства, приведена на рис.6.

---

[8] К числу таковых Дж. Дебре относил теоремы существования общего равновесия и экономического оптимума, а также теорему общественного благосостояния, устанавливающую связь между первыми двумя характеристиками экономической системы.

[9] При условии, как справедливо указывает Дж. Дебре, предоставления каждому производителю возможности воздерживаться от хозяйственной деятельности, то есть в случае, когда $0 \in Y_j$, где Y_j - производственное множество j-го предприятия.

[10] Возрастающую отдачу от масштаба Д. Дебре определял как неубывающую отдачу при условии существования такого производства, для которого масштаб хозяйственной деятельности не может быть сокращен произвольным образом. При этом неубывающая отдача от масштаба имеет место, если для любого произвольного технологического процесса, характеризующегося затрачиваемыми ресурсами и выпускаемой продукцией, возможно произвольным образом увеличить масштаб хозяйственной деятельности.

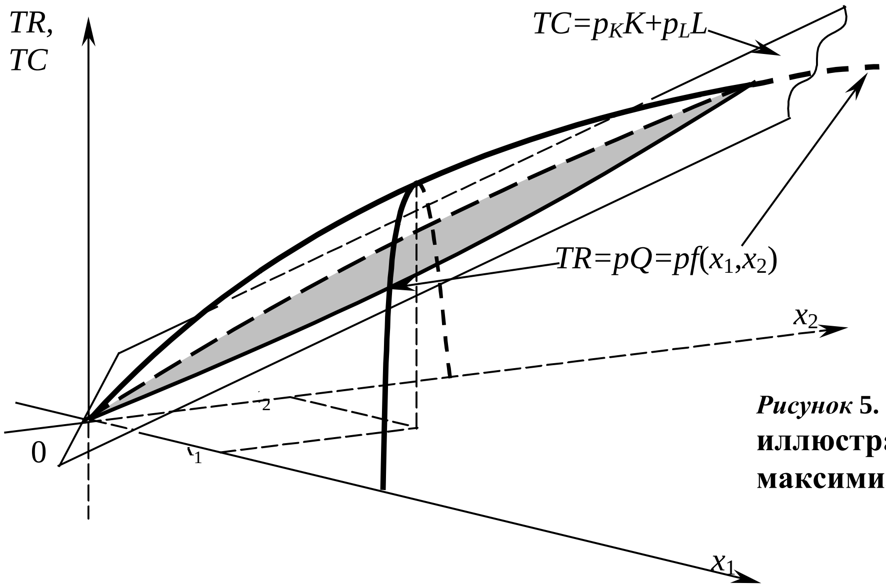

***Рисунок* 5. Геометрическая иллюстрация решения задачи максимизации прибыли.**

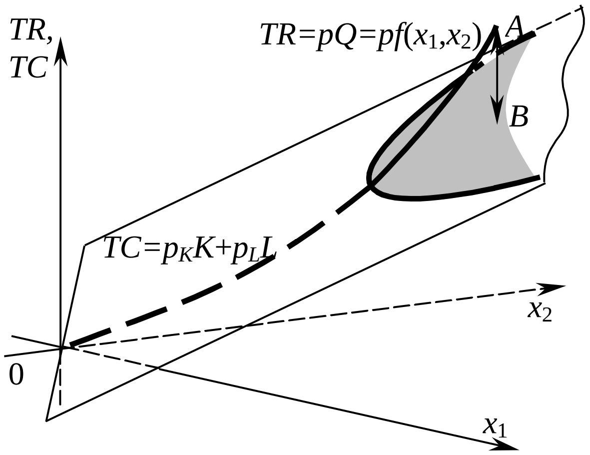

***Рисунок* 6. Отсутствие решения задачи максимизации прибыли в условиях возрастающей отдачи от масштаба производства.**

Таким образом, с ростом объема производства прибыль уходит в бесконечность [11,с.44]. Невозможность реализации цели максимизации прибыли и отсутствие устойчивого равновесия фирмы и рынка при возрастающей отдаче от масштаба производства подталкивает предприятие к неограниченному расширению производства. В связи с этим эксплуатация передовых технологий, специализированных рабочих мест и высококвалифицированных трудовых ресурсов, создающая положительную отдачу от масштаба производства, напрямую сопряжена с монопольными эффектами для конкретного предприятия, максимизирующего прибыль, и является объективной основой монополизации рыночных структур на последовательных стадиях процесса переработки ресурсов в готовый продукт, а также экономики в целом.

Среди исследователей проблем общего экономического равновесия существует осознание всей зыбкости гипотезы выпуклости – парадокса, который становится особенно очевидным в связи с фундаментальной трансформацией социально-экономических отношений, связанной с НТР. Чтобы обойти трудности, обусловленные невыпуклостью технологических множеств экономических агентов, была даже сформулирована и доказана специальная теорема Удзавы[11], которая смягчила требования относительно повсеместной выпуклости, то есть невозрастающей отдачи от масштабов любого производства. Тем не менее, данная теорема не разрешила принципиальной

[11] Uzawa H. Aggregative convexity and the existence of competitive equilibrium // Econ. Studies Quart., 1962. – Vol. 12, №2. – Цит. по [4, с.330-333].

проблемы снижающейся экономической эффективности, лишь перенеся акцент на выпуклость совокупного технологического множества народного хозяйства в целом.

Исследуя сбалансированное функционирование народного хозяйства, классики теории общего равновесия, не выходят за жесткие рамки *гипотезы выпуклости*, а значит, убывающей эффективности масштабов воспроизводственных процессов. Поэтому ограниченность анализа, проводимого К.Дж. Эрроу и Дж. Дебре, заключается в том, что авторы, по сути, исключают из рассмотрения феномены синергетических эффектов и возрастающей отдачи от масштабов общественного воспроизводства.

Итак, в экономической теории на современном уровне ее развития существует согласие относительно возможности существования общего экономического равновесия в ситуации с однородной продукцией на каждом из рынков или в любой отрасли. На первый взгляд, возрастающая отдача от масштаба производства противоречит одному из достаточных условий существования общего экономического равновесия. Вызывает интерес, можно ли добиться общего экономического равновесия в условиях возрастающей отдачи от масштаба производственных функций и функций полезности.

Отталкиваясь от модели общего равновесия Эрроу–Дебре, можно обобщить описание функционирования экономической системы с учетом возрастающей отдачи от масштабов производства. В отличие от традиционной модели Эрроу–Дебре будем рассматривать экономику, в которой предприятие максимизирует не финансовую выгоду, а объемы производимой продукции ($Q_i(x_i)$, i=1,…,m) при очевидных ограничениях по денежным издержкам:

$$TC_i = \sum_{h=1}^{l} p_h \omega_{hi}, i = 1,\ldots,m. \quad (9)$$

При этом задача оптимизации производственной деятельности аналогична задаче поведения потребителя с той лишь разницей, что в качестве целевой функции фигурирует не полезность ($U(x)$), а объем выпуска ($Q(x)$), искомой переменной x является количество используемых ресурсов, а бюджетное ограничение интерпретируется как ограничение по финансовым средствам предприятия:

$$\max_x Q(x): \quad (10)$$

$$px \le TC. \quad (11)$$

Здесь ограничение по издержкам (11) записано в векторной форме.

Учитывая возможность возрастающей отдачи от масштаба производства, нельзя ограничиваться рассмотрением только вогнутых производственных функций. Они должны обладать более общим свойством квазивогнутости.

На данном этапе, при анализе оптимального функционирования отдельного предприятия будем пока абстрагироваться от свободных благ и сконцентрируем внимание на исследовании экономических товаров и услуг. Поэтому предположим, что ни одна из товарных цен не равна нулю, и следовательно, все координаты любого возможного вектора цен $\left(p = \{p_h\}_{h=1}^{l}\right)$ положительны (p_h>0, h=1,…,l). Сделаем традиционный переход к новому масштабу цен. Пронормируем фактическую систему цен таким образом, чтобы новые цены в сумме давали единицу:

$$\bar{p} = \{\bar{p}_h\}_{h=1}^{l} : \bar{p}_h = \frac{p_h}{\sum_{h=1}^{l} p_h}, h = 1,\ldots,l. \quad (12)$$

Натуральные запасы ресурсов у производителей, помноженные на цены, дают изначальное распределение доходов между ними. В связи с этим конечный вектор производственного потребления каждого экономического агента формируется за счет перераспределения путем обмена с помощью купли-продажи соответствующего первоначального запаса ресурсов. Запасы ресурсов (ω_{ih}, i=1,…,m; h=1,…,l) можно трактовать как объемы производства предыдущего периода (x_i, i=1,…,m). Для носителя человеческих капитальных активов первоначальный запас представляет собой накопленные вложения в данный человеческий капитал. Тогда бюджетное ограничение можно рассматривать в качестве условия на безубыточность хозяйственной деятельности:

$$PR_t = TR_{t-1} - \sum_{i=1}^{m} p_{ti} x_{ti} = TC_t - \sum_{i=1}^{m} p_{ti} x_{ti} \geq 0\,. \tag{13}$$

В этом случае задачу максимизации прибыли можно представить как двухпериодовую, условие (13) в которой из целевой функции превращается в ограничение. Поскольку текущие издержки (в момент времени t) оказываются зафиксированными объемом доходов предыдущего периода (t-1), задача максимизации прибыли становится уже задачей условной оптимизации валовой выручки при ограничении по безубыточности. Это ограничение не зависит от текущего выпуска, и поведение предприятий при параметрическом характере цен совпадает с тем, которое определяется максимизацией валового выпуска при ограничении по издержкам (10)-(11). Если рассматривать запасы ресурсов как результат хозяйственно деятельности в предыдущем периоде, то, как следует из дальнейших рассуждений, устанавливается сравнительно, или относительно статическое равновесие в каждый данный период времени t.

Если предположить, что производственная функция $\left(Q : \mathbf{R}_{+}^{l} \to \mathbf{R}_{+}\right)$ является непрерывной $\left(Q \in \mathbf{C}^{0}\left(\mathbf{R}_{+}^{l}\right)\right)$, то решение задачи (10-11) – *оптимальный производственный набор* (x) – *существует*. Как справедливо отмечает В.М. Тихомиров, “основным принципом доказательства теорем существования решения экстремальных задач является принцип компактности” [**1**, с.248]. По теореме Вейерштрасса, если множество S является компактным, то непрерывная функция $\left(Q : x \mapsto Q(x), x \in S\right)$, достигает на S максимального и минимального значения.

Обозначим через S множество физически и экономически доступных для производителя комбинаций факторов $S \equiv \left\{ x \middle| p(x-\omega) \leq 0; x, \omega \in \mathbf{R}_{+}^{l} \right\}$. Докажем *компактность*, то есть *замкнутость и ограниченность*, множества доступных комбинаций факторов производства (S).

Производственное множество (X) замкнуто, поскольку оно представляет собой неотрицательный ортант $\left(\mathbf{R}_{+}^{l}\right)$. Финансовое ограничение (11) представляет собой полупространство, включающее границу (гиперплоскость $p(x-\omega) = 0; x, \omega \in \mathbf{R}_{+}^{l}$), поэтому оно так же является замкнутым множеством. Отсюда прямо следует *замкнутость* множества S как пересечения замкнутых производственного (X) и бюджетного (11) множеств.

В классической модели общего равновесия Эрроу-Дебре рассматривается частнособственническая экономика, когда прибыль предприятий распределятся между потребителями на принципах долевого участия (7). Для того, чтобы исходить из двухпериодовой постановки задачи максимизации прибыли (13), более целесообразно допустить сохранение прибыли в распоряжении предприятий. Прибыль следует рассматривать как эндогенный источник расширенного воспроизводства хозяйствующего субъекта. Это позволяет перейти от неравенства (7) к более простому бюджетному ограничению:

$$\sum_{h=1}^{l} \left[p_h x_h \right] \leq \sum_{h=1}^{l} \left[p_h \omega_h \right]. \tag{14}$$

Для упрощения выкладок при анализе оптимизации деятельности отдельного хозяйствующего субъекта будем опускать соответствующий индекс i или j.

Выделим из всей производственной комбинации фактор под номером n:

$$p_n x_n \le \sum_{h=1}^{l}\left[p_h \omega_h\right] - \sum_{h \ne n}\left[p_h x_h\right]. \tag{15}$$

Неравенство (15) можно ослабить. Поскольку все x_h неотрицательны, их можно заменить в неравенстве (15) нулями:

$$p_n x_n \le \sum_{h=1}^{l}\left[p_h \omega_h\right]. \tag{16}$$

Из (16) получаем:

$$x_n \le \frac{\sum_{h=1}^{l}\left[p_h \omega_h\right]}{p_n}. \tag{17}$$

Деление на p_n в (17) возможно с сохранением знака неравенства, при отсутствии свободных благ, когда p_n является положительным числом. В неравенстве (17) все p_h заведомо меньше единицы; кроме того, заменим p_n цену самого дешевого из товаров минимально возможную "цену спичек" $\underline{p}$:

$$x_n \le \frac{\sum_{h=1}^{l}\omega_h}{\underline{p}}. \tag{18}$$

Используя ограниченность сверху множества запасов $\left(\exists \overline{\varpi} = \{\overline{\varpi}_h\}_{h=1}^{l} : \forall \omega_i = \{\omega_{hi}\}_{h=1}^{l}, \omega_{hi} > 0, \omega_{hi} \le \overline{\varpi}_h, h = 1, \ldots, l\right)$, заменим в неравенстве (18) ω_h на верхнюю границу $(\overline{\varpi})$:

$$x_n \le \frac{l\overline{\varpi}}{\underline{p}}. \tag{19}$$

Кроме того, $x_n \ge 0$. Получаем двойное неравенство:

$$0 \le x_n \le \frac{\overline{p} l \overline{\varpi}}{\underline{p}}. \tag{20}$$

В неравенстве (20) $\overline{\varpi}$, l и $\underline{p}$ – это абсолютные, не зависящие от n константы. Выбор элемента x_n был произвольным, неравенство (20) справедливо для любого n. Следовательно, допустимое производственное множество (S) *ограничено*. Итак, S является *компактным* как замкнутое ограниченное множество.

Проведенное выше доказательство компактности допустимого производственного, либо потребительского, множества имеет силу при положительных ценах товаров и услуг (p>0), что составляет основной предмет исследования экономической теории. В случае неэкономического, или "свободного" блага, при нулевой цене (p=0) доказательство данного факта имеет свои особенности. В этом случае *ограниченность множества* доступных для потребителя корзин товаров и для производителя – наборов ресурсов обеспечивается *натуральным ограничением* количественного запаса благ данного вида в экономике. При этом количество блага у каждого экономического агента мажорируется величиной запаса данного вида благ (см. (22)). Что касается объема выпуска каждого отдельно взятого производителя, то он так же ограничен в натуральном аспекте технологией предприятия и максимально доступным ему объемом ресурсов.

Предположение относительно производственной функции гарантирует ее принадлежность классу $\mathbf{C}^0$ непрерывных функций. Поэтому, по теореме Вейерштрасса, она достигает максимума на компактном допустимом множестве (S), то есть задача (10-11) *разрешима*.

В силу *строгой квазивогнутости* производственной функции решение задачи (10-11) будет *единственным*. Доказательство единственности оптимальной комбинации факторов производства (x) проведем от противного. Пусть найдется другой, не равный полученной нами производственной комбинации (x) набор ресурсов (x'), который также является решением задачи (10-11).

Производственное множество (X) является выпуклым как неотрицательный ортант $\left(\mathbf{R}_+^l\right)$. Ограничение по издержкам (11) является полупространством, ограниченным гиперплоскостью (32), значит, оно – также выпуклое множество. Следовательно, множество доступных для производителя комбинаций факторов (S) *выпукло* как пересечение выпуклых – производственного (X) и экономического (32) – множеств.

Поэтому весь отрезок, соединяющий точки x и x' и состоящий из точек вида $\alpha x+(1-\alpha)x'$, $\alpha\in[0,1]$, содержится в S. Из строгой квазивогнутости производственной функции следует, что:

$$Q(\alpha x+(1-\alpha)x')>Q(x)=Q(x') \qquad (21)$$

Но неравенство (49) противоречит выдвинутой выше гипотезе, что x и x' – решения задачи (10-11), то есть оптимальные комбинации ресурсов. Полученное противоречие показывает, что гипотеза о неединственности оптимального набора факторов производства является ложной, и оптимальная комбинация ресурсов (x) является единственным решением задачи (10-11).

Функция выбора оптимального набора факторов производства получается как вариация комбинации производственных ресурсов, которая является решением задачи условной оптимизации производства, по параметрам – ценам на ресурсы и финансовым средствам предприятия. В силу компактности допустимого производственного множества (S) и единственности оптимальной комбинации факторов (x), *функция выбора* ($x=x(p,\omega)$) *непрерывна* по векторным аргументам цен (p) и наличных запасов у потребителей и производителей (ω)

Докажем непрерывность этой функции применительно к производственной деятельности. Непрерывность функции потребительского выбора при наличии первоначального запаса благ доказывается аналогично. Для доказательства непрерывности функции выбора положим, что $x=x(p,\omega)$ – оптимальная комбинация факторов производства. В силу доказанной в предыдущем параграфе компактности множества $S\equiv\left\{x\middle|p(x-\omega)\le 0; x,\omega\in\mathbf{R}_+^l\right\}$, во-первых, последовательность x_t ограничена, а, по теореме Больцано–Вейерштрасса, из каждой ограниченной последовательности действительных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность; и, во-вторых, множество частичных пределов, или точек сгущения, последовательности x_t принадлежит данному множеству (S). В силу доказанной выше единственности оптимальной комбинации факторов производства, все частичные пределы последовательности x_t совпадают с x, и вся последовательность x_t сходится к x. Это обеспечивает непрерывную зависимость оптимальной комбинации факторов от параметров задачи эффективной организации производства ($x=x(p,\omega)$). Непрерывность функций выбора является ключевым моментом при доказательстве возможности достижения экономикой в целом состояния равновесия.

Функция предложения – это зависимость объема производства от цен на ресурсы и запасов предприятия ($y=y(p,\omega)$). Чтобы получить функцию предложения нужно подставить функции спроса на ресурсы в производственную функцию. Функцию предложения предприятия получается, если заменить факторы производства, фигурирующие в качестве независимых переменных в производственной функции, на соответствующие функции спроса. Поскольку производственная функция и функция спроса на ресурсы являются непрерывными, функция предложения также будет непрерывной как композиция непрерывных отображений $\mathbf{R}_+^{l+1}\to\mathbf{R}_+$.

В силу непрерывности функций производственного выбора, функция предложения – это непрерывная зависимость объема производства от изменений цен на его факторы и запасов производителя. По определению, спрос предприятия на ресурсы – это векторнозначная функция векторного аргумента: $(p,\omega)\mapsto(x)$, $x=\{x_h\}_{h=1}^{l}$, $p=\{p_i\}_{i=1}^{h}$, $\omega_i=\{\omega_{hi}\}_{h=1}^{l}$, i=1,…,m. В силу непрерывности функции спроса, каждая координата x_i, i=1,…,h, функции является непрерывной, следовательно, векторнозначная функция является непрерывной по векторному аргументу (p,ω). Значит, функция предложения, как композиция производственной функции и функций спроса на ресурсы, является непрерывной.

Если допустить возможность множественности выпускаемой продукции, то нужно ставить задачу не на максимум объема производства предприятия, а на максимум функционала качества на множестве чистых выпусков. Данный функционал является аналогом функции потребительских предпочтений для случая экономики с производством. Для непрерывности функции предложения нужно потребовать квазивогнутости данного производственного функционала. В случае одного единственного вида выпускаемой продукции такой функционал качества может тривиально редуцироваться к объему производства предприятия в натуральном, физическом выражении. При множественности выпускаемой продукции данный функционал качества может рассматриваться как обобщение целевых функций - таких, как прибыли, валового выпуска, потребительских предпочтений и других.

Модель общего экономического равновесия вбирает в себя задачи оптимизации функционирования отдельного человеческого капитала с учетом количества экономических агентов в экономике, поскольку общее равновесие – это состояние экономики, когда существует такой вектор цен, что каждый потребитель максимизирует функционал предпочтений, а каждый производитель – объем выпускаемой продукции при условии финансовой сбалансированности хозяйствующих субъектов, к которому добавляется еще и ограничение по физическому количеству продуктов и ресурсов в экономике в целом[12]:

$$\begin{aligned}
&\max_{x_i} U_i(x_i): px_i \le M_i, M_i=\sum_{h=1}^{l} p_h\omega_{hi}, x_i=\{x_{ih}\}_{h=1}^{l}, i=1,\dots,m;\\
&\max_{x_j} Q_j(x_j): px_j \le TC_j, TC_j=\sum_{h=1}^{l} p_h\omega_{ji}, x_j=\{x_{jh}\}_{h=1}^{l}, j=1,\dots,n;\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ih}-\sum_{j=1}^{n} x_{jh}=\sum_{i=1}^{m}\omega_{hi}=\omega_h,\\
&p=\{p_h\}_{h=1}^{l}; M_i, TC_j, x_{ih}, x_{jh}, p_h\in\mathbf{R}_+, p_h\ne 0, h=1,\dots,l.
\end{aligned} \tag{22}$$

Функция совокупного рыночного, или агрегированного, чистого спроса ($z_h(p)$) – это сумма величин избыточного спроса всех m потребителей на данный товар h:

$$z_h=\sum_{i=1}^{m} x_{ih}-\sum_{j=1}^{n} y_{jh}-\omega_h,\ h=1,\dots,l. \tag{23}$$

Традиционно общее экономическое равновесие определяется как равенство нулю или отрицательность, то есть неположительность, избыточного спроса на всех l рынках в экономике:

$$z_i\le 0,\ i=1,\dots,l; \tag{24}$$

[12] Оставим пока за рамками анализа вопросы, связанные с отношениями собственности в производственной сфере. Просто предположим, что первоначальными запасами благ располагают как потребители, так и производители.

при неотрицательных ценах

$$p_i \geq 0,\ i=1,\ldots,l; \tag{25}$$

с учетом дополнительного фундаментального условия, обычно формулируемого аналогично условиям дополняющей нежесткости в задачах математического программирования:

$$p_i z_i = 0,\ i=1,\ldots,l. \tag{26}$$

Последнее условие означает, что либо цена, либо избыточный спрос на каждом из l рынков равняется нулю [**2**, с.155]; [**4**, с.325-326]. При нулевой цене (p=0) *рынок* на данное благо *отсутствует*, то есть потребность полностью удовлетворяется доступным количеством блага *помимо* рыночного механизма распределения.

Итак, формально определение общего экономического равновесия можно записать как систему условий:

$$\begin{cases} z_h = 0 \text{ при } p_h > 0, \\ z_h < 0 \text{ при } p_h = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Поскольку квазивогнутые функции подразумевают возможность как убывающей[13], так и возрастающей отдачи от масштаба, утверждение теоремы Эрроу-Дебре о достаточных условиях существования общего экономического равновесия можно ослабить. В условиях квазивогнутых предпочтений и технологий в силу непрерывности функций потребительского и производственного выбора в задачах условной оптимизации при любом первоначальном распределении запасов благ между экономическими агентами существует вектор цен, при котором достигается общее экономическое равновесие. Это справедливо для временного интервала, когда хозяйствующие субъекты не могут изменить объем осуществленных инвестиций, и затраты являются величиной заданной, фиксированной. Тогда целевой ориентир в виде наибольшей прибыли трансформируется в максимизацию валовой выручки при ограничении по издержкам, которая при экзогенных ценах совпадает с задачей условной оптимизации (10)-(11).

Для доказательства достижения экономикой состояния общего равновесия достаточно рассмотреть функцию агрегированного чистого спроса, зависящую только от вектора цен, положив константой первоначальное распределение запасов благ между владельцами человеческого капитала в потребительной и производительной формах. Ценовое множество $\left(P = \{ p = \{p_h\}_{h=1}^{l} | p_h \geq 0\}\right)$ – это l-мерный брус в $\mathbf{R}_+^l$ $\left(0 \leq \bar{p} \leq 1\right)$. Поэтому оно является непустым компактным выпуклым множеством. Функция избыточного спроса ($z_h(p)$) непрерывна, так как из непрерывной функции валового спроса вычитается непрерывная функция совокупного, рыночного предложения.

Рассмотрим отображение $\varphi_h(p)=p_h+z_h(p)$, h = 1,…,l. Построим композитное отображение:

$$\chi_h(p) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi_h(p) < 0; \\ \varphi_h(p), \text{ если } 0 \leq \varphi_h(p) \leq 1; \\ 1, \text{ если } \varphi_h(p) > 1; \end{cases} \tag{28}$$

где h=1,…,l. Аналогично функции избыточного спроса, также непрерывным является отображение $\chi_h(p)$, h=1,…,l.

Математический аппарат, адекватно описывающий условия общего экономического равновесия, содержится в теореме Брауэра о неподвижной точке[14]. Эта теорема утверждает, что если X – непустое компактное выпуклое множество в $\mathbf{R}^n$, а $f: X \to X$

[13] Во внутренних точках технологического множества.

[14] Brouwer L.E.J. On continuous vector distributions on surfaces // Brouwer L.E.J. Collected works. – Amsterdam-Oxford: North-Holland; New York: Amer. Elsevier, 1976. – Цит. по [4, с.90-91].

– непрерывное отображение, переводящее каждую точку x множества X в некоторую точку $f(x)$ этого же множества X, то f имеет неподвижную точку $(\hat{x})$: $\hat{x} = f(\hat{x})$.

В двумерном случае теорема Брауэра сводится к констатации наличия неподвижной точки ($f(x_0)=x_0$) у любой непрерывной функции, отображающей отрезок $[a,b]$ в себя ($f(x)$:$[a,b]\to[a,b]$), причем $x_0\in[a,b]$. Графически теорема Брауэра при этом означает, что график данной непрерывной функции обязательно пересекает диагональ квадрата со стороной $[a,b]$ (рис.7).

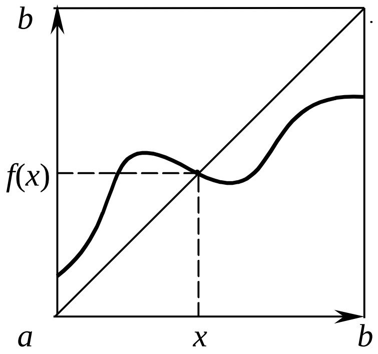

***Рисунок* 7.**

Если не требовать *строгой* квазивогнутости, то возникает потенциальная неединственность решения. В таком случае функция выбора превращается в отношение, поэтому при анализе вопросов, связанных с существованием общего экономического равновесия, теорема Брауэра оказывается уже недостаточной, и необходимо использовать вместо нее утверждение о неподвижной точке в формулировке Какутани. Хотя Дж. Дебре и высказывает сомнения относительно реалистичности подобного усиления предположения квазивогнутости, он, тем не менее, не подкрепляет их весомой аргументацией [11, с.61,66-67,71], что позволяет современным исследователям использовать этот постулат как в нестрогой, так и в строгой формах [11, с.35-36]; [**4**, с.312-316,348,382].

Если принять предположение о *строгой* квазивогнутости анализируемых функций, то решение задач оптимизации процессов производства и потребления оказывается единственным, что позволяет исключить множественные отношения выбора из круга рассматриваемых проблем [11, с.66,71]. Это, в свою очередь, упрощает анализ модели, потому что оказывается возможным доказывать требуемые положения, не прибегая к использованию теоремы Какутани, оперирующей терминами отношений, и ограничиваясь ее более узким вариантом в виде теоремы Брауэра, формулируемой в более привычных понятиях отображений.

Теорема Брауэра в двумерном случае прямо следует из известной теоремы Больцано–Коши, которая гласит, что непрерывная на отрезке $[a,b]$ действительнозначная функция $\left(f : x \mapsto f(x); x, f(x) \in \mathbf{R}; f(x) \in \mathbf{C}^0[a,b]\right)$, имеющая на его концах (в точках a и b) значения разных знаков, обязательно принимает нулевое значение в некоторой внутренней точке отрезка $[a,b]$. Ведь если анализируемая функция отражает числовое множество в себя ($f(x)$:$[a,b]\to[a,b]$) и если в качестве данной функции берется ее разность со своим аргументом ($\varphi(x)=f(x)–x$), то в случае ее равенства нулю по теореме Больцано–Коши, функция $f(x)$ проходит через неподвижную точку ($f(x)=x$), и выполняется теорема Брауэра. При доказательстве существования общего экономического равновесия была построена конструкция с использованием вспомогательной функции $\chi(p)$, которая, как раз, обеспечила совпадение области определения и значений анализируемой функции ($f(x)$:$[a,b]\to[a,b]$). При этом знак входящего в $\chi(p)$ композитного функционала ($\varphi(p)=z(p)+p$) можно изменить с плюса на минус, перейдя от функции избыточного спроса к избыточному предложению, что, очевидно, никак не отразится на полученных результатах. Ведь чистое рыночное предложение – это величина, противоположная по знаку избыточному спросу; то есть это состояние рынка, когда при некоторой цене величина предложения на рынке либо запас блага в натуральном выражении превышает объем спроса. Когда данный функционал, по теореме Брауэра, проходит через неподвижную точку, избыточное предложение, а значит, и чистый спрос равны нулю, что и предполагает теорема Больцано–Коши.

Для доказательства существования общего экономического равновесия рассмотрим преобразование $\chi(p)$, состоящее из l компонент $\chi_h(p)$, h=1,…,l. Отображение $\chi(p): p \mapsto \chi_h(p)$ ставит в соответствие элементам ценового множества (P) значения в этом же множестве $\left(\chi_h(p) \in \mathbf{R}_+^l,\ 0 \le \chi_h(p) \le 1,\ h=1,\dots,l\right)$. Ценовое множество ($P$) непусто, выпукло и компактно. Отображение $\chi(p)$ непрерывно, поскольку непрерывными являются все его l компонент $\chi_h(p)$. Его образ является выпуклым как сумма [11, с.23] выпуклого множества P и выпуклого образа функции избыточного спроса $\left(\varphi(p): p \mapsto \varphi_h(p)\right)$, который представляет собой точку. Следовательно, по теореме Брауэра, отображение $\chi(p): p \mapsto \chi_h(p)$ имеет неподвижную точку $\left(p = \chi(p)\right)$. Покажем, что в этой точке достигается общее экономическое равновесие. Рассмотрим три возможных случая, соответствующих трем составляющим отображения $\chi(p)$:

$$p_h = \chi_h(p) = \begin{cases} 0 \text{ при } \varphi_h(p) < 0; \\ \varphi_h(p) \text{ при } 0 \le \varphi_h(p) \le 1; \\ 1 \text{ при } \varphi_h(p) > 1; \end{cases} \tag{29}$$

где h=1,…,l. В случае, если цена находится внутри допустимого интервала значений $\left(0 < p_h < 1\right)$, получаем следующее равенство: $p_h = \varphi_h(p) = p_h + z_h(p)$, поэтому $z_h(p) = 0$, или избыточный спрос нулевой, и предложение полностью покрывает спрос. Если цена находится на минимальной границе $\left(p_h = 0\right)$, то получается неравенство $\varphi_h(p) = p_h + z_h(p) < 0$, то есть $z_h(p) < 0$. Если же цена находится на максимальной границе $\left(p_h = 1\right)$, то: $\varphi_h(p) = p_h + z_h(p) \ge 1$ Поскольку $p_h \le 1$, имеем: $z_h(p) = x_h - y_h - \omega_h \ge 0$. Но, в силу последнего, натурального ограничения в задаче общего равновесия (27) должно выполняться противоположное неравенство: $x_h - y_h - \omega_h \le 0$. Единственным вариантом, удовлетворяющим эти два неравенства, является случай нулевого избыточного спроса: z_h=0.

Здесь вступает в силу определение общего экономического равновесия (22). Данное равновесное состояние экономики характеризуется равенством спроса и предложения не на всех без исключения рынках. На рынках с минимально возможным уровнем цен может наблюдаться избыточное предложение, а с максимально возможной ценой – избыток спроса. Но закон Вальраса – который утверждает равенство нулю стоимости совокупного чистого спроса – выполняется. В условиях равновесия в целом по экономике избыток предложения над спросом в денежном выражении для товаров с минимальной ценой компенсирует стоимостное превышение спроса над предложением для продуктов с максимальной ценой при том, что преобладающей рыночной ситуацией является равенство спроса и предложения.

При выпуклости производственной функции, или отсутствии этого свойства у технологического множества, общее экономическое равновесие не достигается, поскольку в этом случае специализация предприятий не сопровождается их кооперацией. Каждая внутренняя точка отрезка, соединяющего любые две точки, например, A и B (рис.1), на поверхности выпуклой функции, которая будет соответствовать случаю кооперации специализированных производств, лежит выше графика функции. Следовательно, кооперация оказывается невыгодной.

Тем не менее, выпуклость производственной функции вдоль каждого луча, исходящего из начала координат, не устраняет возможность существования общего экономического равновесия. Но оно возможно лишь в случае, когда специализация производства идет рука об руку с кооперацией специализированных производителей. Если производственная функция, которая характеризуется возрастающей отдачей от масштаба, обладает свойством квазивогнутости (рис.4), то экономика при определенном механизме целеполагания может функционировать сбалансировано. Другими словами, отсутствие выпуклости производственного множества не противоречит условиям сбалансированного функционирования экономической системы и не исключает возможности достижения общего равновесия в экономике. Для достижения равновесного состояния экономики нужно, чтобы линии уровня производственной функции были выпуклыми графиками, что даст вогнутость производственной функции в горизонтальном направлении, то есть параллельно плоскости $K0L$ (рис.4). В этом случае будет выполнена предпосылка о квазивогнутости производственной функции. Таким образом, существование общего экономического равновесия возможно не только при убывающей, но и при возрастающей отдаче от масштаба, однако при исключительно специфическом виде производственной функции и при определенном типе целеполагания экономических агентов.

Помимо полученного выше равновесного вектора цен $\left(p = \left\{p_h\right\}_{h=1}^{l}\right)$, сбалансированное функционирование экономики характеризуется матрицей распределения прав собственности $\Omega = \left|\omega_{ih}\right|_{i,h=1}^{i=m,h=l}$, которая при определении состояния равновесия полагалась заданной изначально. С одной стороны, первоначальные запасы благ в стоимостном выражении через равновесные цены определяют общую величину запаса и потенциальные размеры потоков меновой стоимости в экономике. С другой – это изначально заданное распределение прав собственности на продуктовые запасы определяет объем правомочий в стоимостном выражении у экономических агентов, который будет выступать в качестве эквивалента меновой стоимости товарной массы в процессах купли-продажи.

При проведении доказательства существования общего равновесия в экономике достаточно рассматривать функции чистого спроса, зависящие только от вектора цен, полагая первоначальное распределение запасов продуктов между потребителями и ресурсов между производителями константой. Тем самым, вместе с существованием равновесия в экономике доказывается *теорема Коуза*. Ведь общее экономическое равновесие устанавливается для каждого возможного вектора изначальных запасов продуктов и ресурсов у экономических агентов. Поэтому состояние общего равновесия не будет зависеть от первоначального распределения прав собственности в экономике, что и утверждает теорема Коуза.

В соответствии с традиционной *теоремой Коуза в сильной форме*, в условиях размытости, нечеткой спецификации прав собственности и высоких трансакционных издержках и возникающих в связи с этим внешних эффектах нельзя гарантировать равновесное функционирование экономики, не зависящее от первоначального распределения прав собственности. Структура экономики будет расходиться со сбалансированным состоянием. Но возрастающая отдача от масштаба - это синергетический внешний эффект деятельности команды производителей, не принадлежащий никому из них в отдельности. В силу анализа, проведенного выше, появляется возможность обобщения теоремы Коуза для ситуации возрастающей отдачи от масштаба производства, в которой присутствуют внешние эффекты и существует нечеткая спецификация прав собственности.

Теорема Коуза в слабой форме – при положительном эффекте масштаба хозяйственной деятельности – может быть сформулирована следующим образом: общее экономическое равновесие не зависит от первоначального распределения прав собственности даже при изначальной их неполной спецификации и порождаемых этим внешних эффектах, ели экономические агенты ориентируются на максимизацию валового выпуска при ограничении по издержкам или минимизацию издержек при условии выхода на запланированный объем производства и при этом характеристики технологии предусматривают возможность и необходимость обобществления производства, то есть интеграции хозяйствующих субъектов в систему общественного разделения труда, когда производственные функции и потребительские предпочтения являются квазивогнутыми.

Если в условиях убывающей отдачи от масштаба общее равновесие возможно в случае максимизации предприятиями прибыли, то при возрастающей отдачи от масштаба производства – это уже не так. Отсутствие равновесия предприятий, максимизирующих прибыль, в условиях возрастающей отдачи от масштаба производства дестабилизирует воспроизводственный процесс в масштабах экономики в целом. В силу недостижимости оптимума для отдельного предприятия, максимизирующего прибыль, при положительном эффекте масштаба производства общее экономическое равновесие также невозможно. Следствием “разносящей” динамики национальной экономики при ориентации производителей на максимизацию денежной выгоды в условиях НТР, в частности, является усиление монопольных эффектов.

В более широком контексте, поскольку в условиях возрастающей отдачи от масштаба производства при ориентации экономических агентов на максимизацию прибыли формирование равновесных стоимостных пропорций затруднительно, создаются предпосылки для отклонений цен от их сбалансированной структуры в рамках воспроизводственной картины меновой стоимости. Такие отклонения, в свою очередь, порождают многообразные внешние эффекты, не вписывающиеся в стоимостную картину экономики.

В условиях возрастающей отдачи от масштаба производства общее равновесие, с точки зрения современной экономической теории, не представляется возможным в ситуации, когда все производители максимизируют прибыль. Однако экономическая практика предоставляет многочисленные примеры устойчивого развития предприятий, рынков, народнохозяйственных комплексов в условиях научно-технологического и социально-культурного прогресса. Экономика всегда тяготеет, стремится к равновесному состоянию.

На наш взгляд, причина такого несоответствия хозяйственной практики и теории, опирающейся на гипотезу максимизации прибыли, заключается в том, что значительная доля экономических агентов имеет альтернативную мотивацию хозяйственной деятельности, в частности, в виде максимизации объема производства при ограничении на издержки или минимизации издержек при условии достижения определенного выпуска продукции, что нужно при иметь в виду при балансировке личного и вещественного факторов производства. Описанные выше особенности механизмов микро- и мезоэкономического поведения предприятий оказывает существенное влияние и на макроэкономическую ситуацию.

С одной стороны, в современных условиях глобальной социально-экономической трансформации с вытеснением индустриального производства информационным сектором национальное хозяйство, характеризующееся поведением человеческого капитала экономических субъектов и их объединений, ориентированным на максимизацию объема производства и общественного благосостояния, обладает большей устойчивостью по отношению к экономикам, основанным на максимизации прибыли.

Дело в том, что, в отличие от преобладающего поведения в виде максимизации прибыли, при условной оптимизации производства с ограничениями по финансам и качественным производственным мощностям предприятий общее экономическое равновесие может существовать не только в условиях убывающей и постоянной отдачи от масштаба. Экономика в целом потенциально является устойчивой системой так же и при возрастающей отдаче от масштаба, которая занимает все более значимое место в условиях глобального постиндустриального перехода.

С другой стороны, в условиях специализации производства и специфичности, в особенности, человеческих активов затрудняется достижение общего конкурентного равновесия в экономике. Современная экономика является тонкой, нестабильной системой. В условиях возрастающей отдачи от масштаба экономика самостоятельно только за счет действия конкурентного механизма в крайне редких случаях оказывается в состоянии достигнуть равновесного состояния.

Во-первых, квазивогнутые функции, которые являются строго выпуклыми вдоль любого луча, исходящего из начала координат, а также строго выпуклыми в плоскостях, параллельных координатной плоскости факторов, представляет собой достаточно специфический случай в множестве производственных функций. Во-вторых, предметная и подетальная специализация должна в оптимальной мере сочетаться с кооперацией и комбинированием узкопрофильных производств. В то же время технологическая специализация должна дополняться соответствующей продуктовой диверсификацией, ведь эффект масштаба тесно связан с эффектом разнообразия.

Национальное хозяйство с преобладанием возрастающей отдачи от масштаба становится исключительно уязвимым не только в рамках мировой экономики, но даже в пределах региональной экономической системы. Для такой экономики существует некий порог устойчивости по отношению к структурным преобразованиям, после которого происходит исчезновение квазивогнутости ее макроэкономической производственной функции, что является признаком возрастающей отдачи от масштаба, система общественного разделения труда разрушается, и динамика национального хозяйства становится предметом для изучения с позиции теории катастроф.

Если ориентиром деятельности большинства хозяйствующих субъектов будет выступать максимизация финансовой выгоды, то современная высокотехнологичная экономика становится потенциально неравновесной системой. Для нее затруднительно достижение конкурентного оптимума, но фактически возможно субоптимальное решение задачи оптимизации общественного производства. Это лучшая из худших ситуаций с точки зрения функционирования экономики[15]. Наиболее реальным путем достижения субоптимального равновесия в условиях специализации ресурсов является государственное регулирование ее параметров и пропорций.

Поскольку технология производства практически инвариантна по отношению к типу хозяйственной системы, механизму экономической координации в тех пределах, когда его трансформация не приводит к разрушению либо коренной перестройке всей структуры технологических взаимосвязей внутри хозяйствующих субъектов и между ними, постольку полученные выводы относительно механизма ценообразования в условиях возрастающей отдачи от масштаба производственной деятельности будут справедливы как для частнокапиталистической, так и для смешанной экономики с сильным регулирующим и координирующим воздействием государства на поведение экономических агентов.

---

[15] Ситуация “*second best*” (англ.) – вторая из лучших.

Список использованной литературы

1. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. – М.: Едиториал УРСС, 2000. – 320 с.
2. Ланкастер К. Математическая экономика. Пер. с англ. – М.: Советское радио, 1972. – 464 с.
3. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 176 с.
4. Маршалл А. Принципы экономической науки. В 3-х т. – М.: Прогресс-Универс, 1993.
5. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 517 с.
6. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. Пер. с франц. – М.: Мир, 1988. – 264 с.
7. Теория фирмы / Под ред. В.М. Гальперина. – СПб.: Экономическая школа, 1995. – Серия “Вехи экономической мысли”, вып.2. – 534 с.
8. Черемных Ю.Н. Вопросы качественного исследования решений динамических моделей экономики: элементы магистральной теории. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 214 с.
9. Arrow K.J. Collected papers. In 6 vol. – Cambridge (Mass.): The Belknap press of Harvard university press, 1983-1985.
10. Arrow K., Hahn F. General competitive analysis. – San Francisco (Cal.): Holden Day, Edinburgh: Oliver & Boyd, 1971. – 452 p.
11. Debreu G. Theory of value: an axiomatic analysis of economic equilibrium. – New York: Willey; London: Chapman & Hall, 1959. – 114 p.
12. Pareto V. Manuel d'économie politique. Traduit sur l'édition italienne. Deuxième édition. – Paris: Marcel Giard, 1927. – 695 p.
13. Samuelson P.A. Foundations of economic analysis. 2nd printing. – Cambridge (Mass.): Harvard university press, 1948. – 447 p.
14. Samuelson P.A. The collected scientific papers. In 2 vol. 6th printing. – Cambridge (Mass.); London: The MIT press, 1985.
15. Young A.A. Increasing returns and economic progress // Economic Journal. – London; New York, 1928 (December). – Vol.38. – P.527-542.